

Axiomatische digitale Geometrie und der Satz von Jordan-Brouwer

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt dem Rat

Fakultät für Mathematik und Informatik

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA

eingereicht von Diplom-Informatiker Martin Hünninger

geboren am 28. Dezember 1977 in Jena

Gutachter

1. Prof. Dr. Hans-Dietrich Hecker, Friedrich-Schiller-Universität Jena
2. Prof. Dr. Horst Martini, Technische Universität Chemnitz

Tag der letzten Prüfung des Rigorosums: 24.08.2009

Tag der öffentlichen Verteidigung: 16.09.2009

Zusammenfassung

Dieser Text liefert eine mögliche Antwort auf die von T.Y. Kong in dem Artikel *Can 3-D Digital Topology be Based on Axiomatically Defined Digital Spaces?* [16] aufgeworfene Frage, ob eine Axiomatisierung digitaler Geometrie gefunden werden kann, so daß für alle “guten Paare” von Nachbarschaftsrelationen auf dem Gitter \mathbb{Z}^n das digitale Analogon des Satzes von Jordan-Brouwer erfüllt ist. Dabei werden die von Albrecht Hübler in [10] untersuchten diskreten Geometrien verallgemeinert, ein allgemeiner Begriff einer $(n-1)$ -dimensionalen digitalen Mannigfaltigkeit in einer diskreten Geometrie der Dimension n eingeführt und diese Mannigfaltigkeiten in einen simplizialen Komplex transformiert. Das Resultat der Arbeit ist, daß jede digitale Mannigfaltigkeit unter einem guten Paar einen Simplizialkomplex definiert, dessen geometrische Realisierung den Satz von Jordan-Brouwer erfüllt. Dies beantwortet Kongs Frage positiv.

Danksagung

Ich danke meiner Familie, die mich während der Arbeit an diesem Text unterstützt hat, meinem Betreuer Prof. Dr. Hans-Dietrich Hecker, der es mir erst ermöglicht hat, diese Forschung durchzuführen und nicht zuletzt Prof. Dr. Joachim Giesen für den hilfreichen Tipp, es nochmal mit simplizialen Komplexen zu versuchen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Hüblers Axiome	6
2.1	Die Inzidenzaxiome	6
2.2	Zyklen	11
2.3	Das Axiom der Anordnung	12
2.4	Konvexität	17
2.5	Planarität	19
2.6	Ebenen und Halbebenen	23
2.7	Ein wichtiges Beispiel	26
2.8	Das zweite Diskretheitsaxiom	32
3	Der allgemeine Fall	35
3.1	Diskrete Gitter höheren Ranges	35
3.2	Der Rang einer Menge	38
3.3	Ebenen	41
3.4	Pathologische n -Ebenen	46
3.5	Das zweite Diskretheitsaxiom	48
4	Der topologische Ansatz	50
4.1	Topologische Grundlagen	50
4.2	Alexandroff-Räume	55
4.3	Zwei wichtige Klassen von Alexandroff-Räumen	58

5	Der graphentheoretische Ansatz	61
5.1	Grundlagen	61
5.2	Digitale Mannigfaltigkeiten	67
5.3	Der Zerlegungssatz von Jordan-Brouwer	73
5.4	Der Beweis des Satzes von Jordan-Brouwer	83
5.4.1	Die Homogenität	83
5.4.2	Die Nichtdegeneriertheit	87
5.4.3	Der starke Zusammenhang	90
6	Gute Paare von Adjazenzrelationen	100
6.1	Kubische Adjazenzen	100
6.2	Gute Paare kubischer Adjazenzen	103
6.3	Die Khalimsky-Topologie als gutes Paar	112
7	Abschließende Bemerkungen	122

Kapitel 1

Einleitung

Im Jahr 2001 formulierte T. Yung Kong in dem Artikel [16] die Frage, ob es denn möglich sei, eine Axiomatisierung digitaler Geometrien zu finden, die es ermöglicht, Paare von Nachbarschaftsrelationen auf dem Gitter \mathbb{Z}^3 zu finden, so daß die dreidimensionale Version des digitalen Analogons des Jordanschen Kurvensatzes erfüllt ist. Diese Arbeit soll sich diesem Thema widmen und eine mögliche Lösung anbieten.

Satz 1.0.1 (Jordanscher Kurvensatz) *Jede Jordankurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ zerlegt \mathbb{R}^2 in zwei Gebiete, die von ihr berandet werden, genauer: Es ist $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma = G_1 \cup G_2$, wobei G_1 und G_2 disjunkte Gebiete mit $\partial G_1 = \partial G_2 = \Gamma$ sind. Genau eines dieser beiden Gebiete – es wird das Innengebiet genannt – ist beschränkt.*

Der Satz von Jordan, der nach H. Heuser [8] die obige Formulierung besitzt, ist eine der wichtigsten topologischen Aussagen. Er liefert die Grundlage dafür, das Innen und das Außen einer Menge mathematisch voneinander zu unterscheiden. Seine Aussage ist auf den ersten Blick leicht zu erfassen und scheint intuitiv gültig. Dies mag der Grund sein, weshalb Generationen von Mathematikern ihn vor seinem ersten Beweis benutzten. Trotz seiner Anschaulichkeit ist der Jordansche Kurvensatz schwer zu beweisen. Das gilt insbesondere für den Fall, in dem die Jordankurve kein Polygon ist. Daher verwundert es kaum, daß die erste Version eines Beweises, die im Jahre 1893 von Camille Jordan gegeben wurde, noch unvollständig ist. Ein Beweis kann unter anderem bei Moise [19] oder bei Alexandroff¹ [2] gefunden werden. Dabei benutzt die Version Alexandroffs die Methoden der algebraischen

¹Der Name Alexandorffs in der englischen Transliteration ist Alexandrov. Wir werden im weiteren Text aus historischen Gründen nur diese Version verwenden.

Topologie, die eines der Hauptwerkzeuge bei der Untersuchung der Verallgemeinerung des Satzes 1.0.1 ist. Die Verallgemeinerung des Jordanschen Kurvensatzes auf beliebige Dimensionen und der zugehörige Beweis gehen auf Luitzen E. J. Brouwer (1910) zurück. Die Formulierung nach Stöcker und Zieschang [22] lautet:

Satz 1.0.2 (Satz von Jordan-Brouwer) *Ist $S \subset \mathbb{R}^n$ eine Sphäre der Dimension $(n - 1)$ mit $n \geq 2$, so besteht $\mathbb{R}^n \setminus S$ aus genau zwei Wegekomponten.*

Mit dem Aufkommen digitaler Technik und deren Einsatz in der digitalen Signalverarbeitung ab der Mitte des letzten Jahrhunderts, bestand plötzlich die Notwendigkeit, topologische Eigenschaften digitalisierter Daten, insbesondere von Bildern, zu untersuchen. So verwundert es nicht, daß Azriel Rosenfeld im Jahre 1973 Autor des ersten Artikels [21] war, der sich mit dem Problem von Kurven und Bögen in zweidimensionalen digitalen Datenmengen befaßte. Das Problem der digitalen Topologie ist, daß je nachdem, wie der Wegezusammenhang des Komplementes der digitalen Kurve und der Zusammenhang der Punkte der digitalen Kurve definiert sind, die diskrete Variante des Satzes von Jordan Brouwer nicht gelten muß.

Satz 1.0.3 (Digitaler Satz von Jordan-Brouwer) *Es sei $S \subset \mathbb{Z}^n$ eine $(n - 1)$ -dimensionale digitale Sphäre ($n \geq 2$), so besteht $\mathbb{Z}^n \setminus S$ aus genau zwei Wegekomponten.*

Betrachten wir dazu die Abbildung 1.1. Die dargestellte Menge von schwarzen Punkten stelle eine geschlossene Kurve S dar. Unter der Bedingung, daß ein Punkt nur die vier Nachbarn hat, die mit ihm durch die Kanten des Gitters verbunden sind, ist das eine einleuchtende Annahme. Nun wird aber $\mathbb{Z}^n \setminus S$ in drei Wegekomponten unter dieser Nachbarschaftsbeziehung zerlegt, denn die beiden im Inneren der Kurve gelegenen Punkte bilden zwei einpunktige Wegekomponten.

Damit stellt sich nun sofort die Frage nach der Wahl der Nachbarschaftsrelationen für S und für $\mathbb{Z}^n \setminus S$. In der Literatur hat sich der Begriff des “guten Paares” für solche zwei Nachbarschaftsrelationen durchgesetzt. Leider sind die bisherigen Methoden zum Finden guter Paare sehr beschränkt. Es ist üblich den Nachweis für zwei konkrete Nachbarschaftsrelationen direkt zu führen und es existieren, trotz der langen Bekanntheit des Problems und der Literatur, die zum Thema der guten Paare publiziert wurde, nur wenige Arbeiten, die einen allgemeinen Ansatz entwickeln. Eine dieser Arbeiten ist [13]

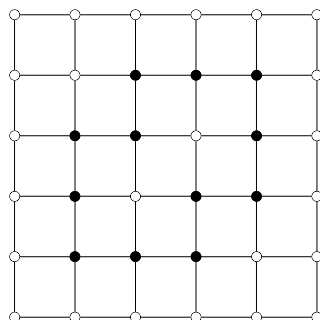


Abbildung 1.1: Die durch die schwarzen Punkte dargestellte Menge nicht den Jordanschen-Kurvensatz, wenn die weißen Punkte 4-benachbart sind

von Mohammed Khachan et al. aus 2003, in der für beliebige Dimensionen n gezeigt wird, daß die $2n$ - mit der $(3^n - 1)$ -Nachbarschaft für S bzw. $\mathbb{Z}^n \setminus S$ ein gutes Paar bildet. Allerdings ist die Vorgehensweise speziell auf die untersuchten Nachbarschaftsrelationen ausgerichtet und eine direkte Übertragung des Ergebnisses auf andere Fälle schwierig.

Ein weiterer allgemeiner Ansatz ist der von Gabor T. Herman [6] aus dem Jahr 1996. In seiner Theorie ist es möglich, für verschiedenartige Paare von Nachbarschaften in beliebigen Dimensionen festzustellen, ob es sich um gute Paare handelt. Das Schwachpunkt seines Ansatzes ist allerdings, daß er die Jordan-Kurve zu einer Teilmenge der Nachbarschaftsrelation werden läßt und nicht zu einer Punktmenge, wie es in der ursprünglichen Formulierung von Satz 1.0.2 gefordert ist.

Ein weiterer Ansatz, der aber in der Vergangenheit der Betrachtungen zu dem Thema eine eher untergeordnete Rolle gespielt hat, ist die Theorie von Alexandroff [1] aus dem Jahr 1934. In dieser Arbeit wird die Möglichkeit der Topologisierung diskreter Mengen untersucht und somit eine lange Zeit unbeachtete Grundlage für die Definition digitaler Topologien gelegt. Erst in den 1980er Jahren sind von Efim Khalimsky Arbeiten [12] vorgelegt worden, die Aspekte dieser Theorie aufgriffen.

In dieser Arbeit sollen die Kenntnisse um die Vor- und Nachteile der genannten Theorien genutzt werden, eine Axiomatisierung digitaler Geometrien anzugeben, die es ermöglicht den Nachweis von guten Paaren in beliebigen Dimensionen einfach zu erbringen. Dabei ist die Vorgehensweise die folgende: Im zweiten Kapitel wird die Axiomatisierung der zugrundeliegenden Geometrie vorgenommen. Dieses Kapitel basiert auf der Arbeit von Albrecht Hübler [10] aus dem Jahr 1989. Seine Dissertationschrift befaßte sich mit einem Axiomensystem einer zweidimensionalen digitalen Geometrie. Dieser Ansatz wird

übernommen und im Kapitel 3 auf beliebige Dimensionen ausgeweitet. Das zentrale Resultat ist die Darstellbarkeit einer jeden digitalen Geometrie als zu \mathbb{Z}^n isomorphe Menge.

Im vierten Kapitel werden grundlegende Untersuchungen zu Nachbarschaftsrelationen vorgenommen, die aus einem topologischen Kontext im Sinne Alexandroffs entstehen. Dieser Abschnitt dient dazu, die Grundbegriffe und die topologischen Vorstellungen zu präzisieren. Dies ist insbesondere deshalb notwendig, da die darauffolgenden Kapitel, historisch bedingt, einer graphentheoretischen Vorstellung Rechnung tragen, die aber ihrerseits topologische Konzepte beschreibt.

Das fünfte Kapitel enthält den Beweis einer diskreten (digitalen) Variante des Jordan-Brouwerschen Zerlegungssatzes. Es beginnt mit graphentheoretischen Werkzeugen und der Erarbeitung des Konzeptes des Beweises. Die Idee des Kapitels ist, wie in der Arbeit von Khachan, einen (simplicialen) Komplex zu definieren, dessen geometrische Realisierung in der euklidischen Geometrie, den Satz von Jordan-Brouwer erfüllt. Dazu ist es notwendig, eine neue Definition für die Verallgemeinerung einer digitalen Kurve bzw. Fläche in beliebigen Dimensionen anzugeben. Diese Definition erweitert die bestehende, bei Klette und Rosenfeld [15] angegebene. Diese gilt nur in den Dimensionen 2 und 3. Der Rest des Kapitels enthält den Beweis der Korrektheit dieser Vorgehensweise.

Im sechsten Kapitel wird die Theorie auf zwei Klassen von Nachbarschaftsrelationen angewendet. Diese Klassen sind bereits untersucht worden, zum Beispiel bei Herman [6]. Es zeigt sich dadurch, wie die Theorie in das bekannte Wissen eingegliedert werden kann. Komplexere Beispiele sind jedoch denkbar.

Das siebente und letzte Kapitel fasst die Ergebnisse zusammen und liefert einen Blick auf Fragestellungen, die durch diese Arbeit aufgeworfen werden.

Kapitel 2

Hübbers Axiome

Dieses Kapitel rekapituliert die Ergebnisse Albrecht Hübbers. Die Darstellung soll dabei an einigen Stellen die Beweisführung prägnanter gestalten. Weiterhin wird durch Verallgemeinerung des Beispiels in Abschnitt 2.7 die Korrektheit Hübbers, entgegen des im Anhang von Nils Anders Danielsson in [4] angemerkten möglichen Fehlers, nachgewiesen. Dieses Kapitel und die darin verwendete Notation bilden die Grundlage für den weiteren Text.

2.1 Die Inzidenzaxiome

Wir klären zuerst, was man allgemein unter einer Geometrie versteht. Die präsentierten Begriffe entstammen [3] und ermöglichen die Einordnung aller bekannten Geometrien.

Definition 2.1.1 *Eine **Geometrie** ist ein Paar (Ω, \bowtie) , wobei Ω eine Menge ist und \bowtie eine symmetrische und reflexive Relation, das heißt:*

- $x \bowtie y \Rightarrow y \bowtie x$ für $x, y \in \Omega$.
- $x \bowtie x$ für $x \in \Omega$.

Dabei bezeichnet \bowtie , die so genannte **Inzidenzrelation**, das ineinanderliegen von Objekten aus Ω . Elemente die in der Inzidenzrelation liegen heißen **inzident**.

Definition 2.1.2 *Es sei (Ω, \bowtie) eine Geometrie. Eine **Fahne** dieser Geometrie ist eine Menge von Elementen aus Ω , die paarweise inzident sind. Eine*

Fahne F heißt **maximal**, wenn es kein Element $x \in \Omega \setminus F$ gibt, so daß $F \cup x$ ebenfalls Fahne ist.

Definition 2.1.3 eine Geometrie (Ω, \bowtie) heißt vom **Rang** r , falls man Ω disjunkt in Mengen $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ zerlegen kann, so daß jede maximale Fahne dieser Geometrie genau ein Element aus jedem Ω_i enthält. Die Elemente aus Ω_i heißen vom **Typ** i .

Lemma 2.1.1 Es sei (Ω, \bowtie) Eine Geometrie vom Rang r . Dann gilt:

1. Je zwei Elemente von gleichen Typ sind nicht inzident.
2. Je zwei inzidente Elemente inzidieren mit mindestens einem gemeinsamen Typ 1-Element. \square

Eine Geometrie (Ω, \bowtie) vom Rang 2 heißt **Inzidenzstruktur**. Die Elemente vom Typ 1 heißen **Punkte**, die vom Typ 2 **Blöcke**. Die Geometrie kann dann auch so bezeichnet werden: $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \bowtie)$.

Wir betrachten nun die ersten drei Axiome Hübblers Axiomensystems. Diese dienen dazu, die Inzidenz von Punkten und Geraden zu formulieren. Die Inzidenzrelation wird im Weiteren nicht explizit gemacht werden.

Axiom 1 (Geradenaxiom). Für $p, q \in \mathcal{P}$ verschieden, existiert genau ein $g \in \mathcal{G}$ mit $p \in g$ und $q \in g$.

Wir bezeichnen mit $g := g(p, q)$, für $p, q \in \mathcal{P}$, die durch p und q eindeutig bestimmte Gerade $g \in \mathcal{G}$.

Axiom 2 Mit einer Geraden inzidieren stets mindestens zwei Punkte. Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Liegen drei Punkte auf einer Geraden, so heißen diese kollinear. Unser Fokus liegt auf der Beschreibung *diskreter* Geometrien. Wie man sich leicht vorstellen kann, ist es nicht möglich, ein Parallelenaxiom ähnlich dem euklidischen zu fordern (siehe [9]). Denn es existieren Geraden, die sich nicht schneiden und nicht in diesem Sinne parallel sind. Daher wird ein anderer Weg eingeschlagen:

Axiom 3 Auf \mathcal{G} ist eine Äquivalenzrelation \parallel definiert, so daß für je ein $g \in \mathcal{G}$ und ein $p \in \mathcal{P}$ genau ein $g' \in \mathcal{G}$ existiert mit $p \in g'$ und $g \parallel g'$.

Die \parallel -Äquivalenzklassen heißen **Richtungen**.

Definition 2.1.4 Eine Bijektion $\tau : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ heißt **Verschiebung**, wenn $\tau = \text{Id}_{\mathcal{P}}$ oder wenn τ folgende Eigenschaften erfüllt:

T1 Für $g \in \mathcal{G}$ ist $\tau(g) = \{\tau(p) : p \in g\} \parallel g$.

T2 Für $p \in \mathcal{P}$ gilt $\tau(p) \neq p$.

T3 Die durch $\{g(p, \tau(p)) : p \in \mathcal{P}\}$ definierte Geradenmenge ist eine Richtung.

Die Menge aller solcher Verschiebungen wird mit \mathcal{T} bezeichnet.

Axiom 4 Für $p, q \in \mathcal{P}$ existiert ein $\tau \in \mathcal{T}$ mit $\tau(p) = q$.

Lemma 2.1.2 Dieses $\tau \in \mathcal{T}$ ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Ist $p = q$ so ist nach T2 die gesuchte Verschiebung die Identität auf \mathcal{P} .

Es seien nun $\tau, \sigma \in \mathcal{T}$ verschieden mit $\tau(p) = \sigma(p) = q$. Dann existiert ein $r \in \mathcal{P}$ mit $s = \tau(r) \neq \sigma(r) = t$. Nach T1 ist $g(p, r) \parallel g(q, s) \parallel g(q, t)$ und nach Axiom 3 ist $g(q, s) = g(q, t)$. Weiterhin ist mit T3 $g(p, q) \parallel g(r, s) \parallel g(r, t)$ und damit $g(r, s) = g(r, t)$. Da q, s, t und r, s, t jeweils kollinear sind, liegen nach Axiom 1 die Punkte q, r, s, t auf einer Geraden, die nach Axiom 3 offenbar auch durch p geht. Für alle $u \notin g(p, q)$ gilt nun $\tau(u) = \sigma(u)$. Wir wählen ein $g' \in \mathcal{G}$ mit $r \in g'$ und $g' \not\parallel g(p, q)$. Mit den Axiomen 1 und 3 erkennt man den Schnittpunkt dieser Geraden als r . Für $u \in g, u \neq r$ ist $\tau(u) = \sigma(u)$ und deshalb $g' \parallel \tau(g') \parallel \sigma(g')$, woraus folgt, daß $\tau(r) = s \in \sigma(g')$. Mit $s' := (\sigma^{-1})(s)$ folgt aus $s' \neq r$, daß $\tau(s') = \sigma(s') = s$, was der Bijektivität von τ widerspricht, da das Urbild von s unter τ die Menge $\{s', r\}$ ist. \square

Satz 2.1.1 Zwei Geraden g_1, g_2 sind genau dann parallel, wenn eine Verschiebung $\tau \neq \text{Id}$ existiert mit $\tau(g_1) = g_1$ und $\tau(g_2) = g_2$.

Beweis. (\Rightarrow) $p_1 \in g_1, p_2 \in g_2, \tau \in \mathcal{T}$ mit $\tau \neq \text{Id}$ und $\tau(p_1) \in g_1$. Dann folgt $g(p_1, \tau(p_1)) = g_1$. Nach T3 ist $g(p_2, \tau(p_2)) \parallel g(p_1, \tau(p_1))$, wegen $g_1 \parallel g_2$ folgt $g_2 \parallel g(p_2, \tau(p_2))$ und nach Axiom 3 $g_2 = g(p_2, \tau(p_2))$. Da p_1 und p_2 beliebig sind, sind g_1 und g_2 Fixgeraden von τ .

(\Leftarrow) Sind g_1, g_2 Fixgeraden von τ , so folgt der Satz aus T3. \square

Satz 2.1.2 $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ sind genau dann parallel, wenn ein $\tau \in \mathcal{T}$ existiert mit $\tau(g_1) = g_2$.

Beweis. (\Rightarrow) $g_1 \parallel g_2, p_1 \in g_1, p_2 \in g_2$. Es existiert ein $\tau \in \mathcal{T}$ mit $\tau(p_1) = p_2$. Nach T1 ist $\tau(g_1) = g_1$ und nach Axiom 3 mit $p_2 \in g_2$ gilt $\tau(g_1) = g_2$.

(\Leftarrow) Wenn ein $\tau \in \mathcal{T}$ mit $\tau(g_1) = g_2$ existiert folgt mit T1 $g_1 \parallel g_2$. \square

Wie die letzten beiden Sätze zeigen, ist die Parallelenrelation \parallel durch die Menge \mathcal{T} eindeutig charakterisiert.

Satz 2.1.3 Wenn \circ die Hintereinanderausführung von Verschiebungen bezeichnet, so ist (\mathcal{T}, \circ) eine abelsche Gruppe.

Hübler gibt in seiner Arbeit [10] einen konstruktiven Beweis dieses Satzes, insbesondere im 1. Schritt. Dieser ist aber länglich. Deshalb soll hier eine andere Version betrachtet werden.

Beweis. 1. Schritt: Wir zeigen, daß \mathcal{T} unter \circ abgeschlossen ist. Es ist also zu zeigen, daß für beliebige $\tau, \sigma \in \mathcal{T}$ die Komposition $\tau \circ \sigma$ die Forderungen T1, T2 und T3 erfüllt. Falls $\tau = \text{Id}$, $\sigma = \text{Id}$ oder $\tau \circ \sigma = \text{Id}$, so folgt trivialerweise $\tau \circ \sigma \in \mathcal{T}$. Es seien also diese Fälle ausgeschlossen.

T1 folgt aus der Transitivität von \parallel für ein beliebiges $g \in \mathcal{G}$ durch

$$\tau(g) \parallel g, \sigma(g) \parallel g \Rightarrow (\tau + \sigma)(g) \parallel \sigma(g) \parallel g.$$

T2 erhält man für $p \in \mathcal{P}$ so: $\tau \circ \sigma \neq \text{Id}$ damit ist $(\tau \circ \sigma)(p) \neq p$ wegen Lemma 2.1.2. Für alle $q \in \mathcal{P}$ sei $g := g(p, q)$ und $h := (\tau \circ \sigma)(g)$. g und h sind offenbar verschieden und haben keine gemeinsamen Punkte. Somit ist $(\tau \circ \sigma)(q) \neq q$.

Um T3 zu zeigen, müssen wir $M := \{g(p, (\tau \circ \sigma)(p)) : p \in \mathcal{P}\}$ als Richtung erkennen. Das heißt, für alle $g, h \in M$ gilt $g \parallel h$ und für $g \in \mathcal{G}, h \in M, g \parallel h$ gilt $g \in M$. Angenommen, es existieren $g, h \in M$ mit $g \nparallel h$. Dann existiert

ein s mit $s \in g$, $s \in h$. Es gibt in \mathcal{P} also Punkte $p' \in g$ und $q' \in h$ mit $(\tau \circ \sigma)(p') = s$ und $(\tau \circ \sigma)(q') = s$, woraus $p' = q'$ folgt. Dies ist aber wegen $\tau \circ \sigma \neq \text{Id}$ ein Widerspruch.

2. Schritt: \circ ist assoziativ. Für beliebiges $p \in \mathcal{P}$ und $\tau, \sigma, v \in \mathcal{T}$ sieht man:

$$\begin{aligned} ((\tau \circ \sigma) \circ v)(p) &= v((\tau \circ \sigma)(p)) \\ &= v(\sigma(\tau(p))) \\ &= (\sigma \circ v)(\tau(p)) \\ &= (\tau \circ (\sigma \circ v))(p) \end{aligned}$$

3. Schritt: Id ist neutrales Element von (\mathcal{T}, \circ) . Es sei $p \in \mathcal{P}$ beliebig:

$$(\tau \circ \text{Id})(p) = \text{Id}(\tau(p)) = \tau(p) = \tau(\text{Id}(p)) = (\text{Id} \circ \tau)(p)$$

4. Schritt: Existenz von inversen Elementen. Es seien $p, q \in \mathcal{P}$ beliebig und $\tau, \sigma \in \mathcal{T}$ so, daß $\tau(p) = q$ und $\sigma(q) = p$.

$$(\tau \circ \sigma)(p) = \sigma(\tau(p)) = \sigma(q) = p = \text{Id}(p)$$

5. Schritt: Kommutativität von \circ . Es seien $\tau, \sigma \in \mathcal{T}$ und $p \in \mathcal{P}$ beliebig. Weiterhin nehmen wir an, daß $g(p, \tau(p)) \nparallel g(p, \sigma(p))$. Dann sieht man leicht:

$$g(p, \tau(p)) \parallel g(\sigma(p), (\sigma \circ \tau)(p)) \parallel g(\sigma(p), (\tau \circ \sigma)(p))$$

Somit folgt $g(\sigma(p), (\sigma \circ \tau)(p)) = g(\sigma(p), (\tau \circ \sigma)(p))$. Analog dazu erhält man $g(\tau(p), (\sigma \circ \tau)(p)) = g(\tau(p), (\tau \circ \sigma)(p))$. Wegen $g(\sigma(p), (\sigma \circ \tau)(p)) \nparallel g(\tau(p), (\sigma \circ \tau)(p))$ schneiden sich diese Geraden in $(\sigma \circ \tau)(p)$ und aus dem gleichen Grunde schneiden sich $g(\sigma(p), (\tau \circ \sigma)(p))$ und $g(\tau(p), (\tau \circ \sigma)(p))$ in $(\tau \circ \sigma)(p)$. Aus den Axiomen 1 und 3 folgt die Gleichheit dieser Punkte.

Im Falle der Parallelität von $g(p, \tau(p))$ und $g(p, \sigma(p))$ existiert ein $v \in \mathcal{T}$ mit $v(p) \notin g(p, \tau(p))$ für das $g(p, \tau(p)) \nparallel g(p, v(p))$ gilt, womit aus dem ersten Fall $\tau \circ v = v \circ \tau$ und $\sigma \circ v = v \circ \sigma$ folgt. Die Elemente $(\tau \circ \sigma)$ und $(v \circ \tau)$ erfüllen die Voraussetzungen des ersten Falles und somit sieht man wegen

$$(\tau \circ \sigma) \circ (v \circ \tau) = (\tau \circ v) \circ (\sigma \circ \tau)$$

die Gleichheit von $(\tau \circ \sigma)$ und $(\sigma \circ \tau)$. □

2.2 Zyklen

Da die Gruppe (\mathcal{T}, \circ) abelsch ist, läßt sie sich vermittels

$$\underbrace{\tau \circ \dots \circ \tau}_{n\text{-mal}} = \tau^n$$

als \mathbb{Z} -Modul charakterisieren. Nun kann man sich die Frage stellen, ob eine nicht-triviale Torsionsuntergruppe von \mathcal{T} existiert, d.h., ob die Translationsgruppe Elemente endlicher Ordnung besitzt. Als Ergebnis dieses Abschnittes zeigen sich, daß alle Elemente von \mathcal{T} die gleiche Ordnung besitzen. Wenn also eine zyklische Translation existiert, so besitzen alle anderen die gleiche Zyklenlänge.

Beginnen wir mit den Grundbegriffen:

Definition 2.2.1 $\tau \in \mathcal{T}$ heißt **zyklisch**, wenn ein $n \in \mathbb{N}^*$ existiert, so daß jeder Punkt $p \in \mathcal{P}$ unter τ^n fest bleibt. Das kleinste $m > 0$ mit $\tau^m(p) = p$ heißt **Zyklenlänge** oder **Ordnung** von τ (Schreibweise $\text{ord}(\tau)$). Falls kein solches m existiert, so sei $\text{ord}(\tau) := 0$.

Ein Beispiel einer zyklischen Translation wäre eine Abbildung, die einen Punkt auf einem Großkreis einer Kugel um einen rationalen Winkel bewegt.

Satz 2.2.1 Existiert ein $\tau \in \mathcal{T}$ mit $\text{ord}(\tau) = n > 0$, so sind alle von Id verschieden Verschiebungen zyklisch mit Zyklenlänge n .

Beweis. Es sei $\tau \in \mathcal{T}$ mit $\text{ord}(\tau) = n > 0$ und $\sigma \in \mathcal{T} \setminus \{\tau, \text{Id}\}$ mit $g(p, \tau(p)) \neq g(p, \sigma(p))$ für $p \in \mathcal{P}$. $\text{ord}(\sigma) = 0$ oder $\text{ord}(\sigma) = m > n$. Für $p^0 \in \mathcal{P}$ sei $\{p_1^0, \dots, p_n^0\}$ der Orbit von p^0 unter τ mit $p_i^0 = i\tau(p^0)$, $i = 1, \dots, n$.

Wir betrachten nun für $p^i := \sigma^i(p^0)$, $i = 1, \dots, n$ die jeweiligen τ -Orbits $\{\tau^j(p^i) : j \in \mathbb{Z}\}$. Es gilt für alle i und j : $\sigma(p_j^i) = p_j^{i+1}$. Die Orbits der p_j^i unter σ haben für alle j eine Kardinalität größer als n , da σ sonst eine kleinere Ordnung als τ hätte. Nach T1, den Inzidenzaxiomen, der Transitivität von \parallel und dem Fakt $\tau(p_n^i) = p_1^i$, gilt für $i = 1, \dots, n-2$:

$$\begin{aligned} g(p_n^i, p_{n-1}^{i+1}) \parallel g(\tau(p_n^i), \tau(p_{n-1}^{i+1})) &= g(p_1^i, p_n^{i+1}) \parallel g(\sigma(p_n^i), \sigma(p_{n-1}^{i+1})) \\ g(\sigma(p_n^i), \sigma(p_{n-1}^{i+1})) &= g(p_n^{i+1}, p_{n-1}^{i+2}) \end{aligned}$$

Das heißt, die Punkte p_2^i, p_1^{i+1} und p_{n-1}^{i+2} sind kollinear. Analog erhält man diese Aussage für $p_j^i, p_{j-1}^{i+1}, p_{j-2}^{i+2}$, $j = 2, \dots, n$ und $i = 1, \dots, n-2$.

Auf der Gerade $g(p_n^0, \sigma(p_n^0))$ liegen die Punkte $p_n^0, p_n^1, \dots, p_n^n$. Aus der Kollinearität der $p_n^0, p_{n-1}^1, \dots, p_n^n$, folgt nun, daß diese Punkte wegen Axiom 1 auf $g(p_n^0, \sigma(p_n^0))$ liegen müssen. Das zieht nun die Kollinearität aller p_j^i nach sich, was aber der Voraussetzung, daß τ und σ verschiedene Richtungen erzeugen, widerspricht. Damit ist die Behauptung bewiesen. \square

Folgerung 2.2.1 *Es sei $\tau \in \mathcal{T}$, $\text{ord}(\tau) = n > 0$. Dann ist n Primzahl.*

Beweis. Wir nehmen an für ein solches τ wäre n keine Primzahl. Dann existieren natürliche Zahlen a und b , so daß weder a noch b gleich 1 ist und $n = ab$. Nun erzeugt $\sigma = \tau^a$ das Element $\sigma^b = \tau^{ab} = \tau^n = \text{Id}$. Damit ist $\text{ord}(\sigma) = b < n$, was Lemma 2.2.1 widerspricht. \square

Wir wissen, daß \mathcal{T} ein \mathbb{Z} -Modul ist. Weiterhin hat jedes $\tau \in \mathcal{T}$ die gleiche Ordnung, welche zudem prim ist, wenn ein τ zyklisch ist. Man sieht nun leicht, daß in diesem Fall \mathcal{T} zu einem Vektorraum über einem Körper \mathbb{Z}_p wird, wobei $p = \text{ord}(\tau)$ für ein $\tau \in \mathcal{T}$. Dies liefert insbesondere eine Erklärung für endliche Geometrien.

2.3 Das Axiom der Anordnung

In diesem Abschnitt werden die Unterschiede zwischen kontinuierlichen und diskreten Geometrien herausgearbeitet. Diese Unterscheidung wird sich aus der Anordnung der Punkte einer Geraden ableiten lassen. Dazu beobachten wir, daß sich zu einer beliebigen Geraden $g \in \mathcal{G}$ eine Relation $< \subset g \times g$ finden läßt, die eine lineare Ordnung ist.

Definition 2.3.1 *Eine **lineare Ordnung** auf einer Menge g ist eine binäre Relation $< \subset g \times g$, die transitiv, konnex und auf g irreflexiv ist.*

Das Paar $(g, <)$ heißt **orientierte Gerade**. Mit der Erklärung $p > q :\Leftrightarrow p < q$ wird klar, daß $>$ auch eine lineare Ordnung ist, mit der $(g, >)$ auch zu einer orientierten Geraden wird.

Definition 2.3.2 *Es sei $(g, <)$ eine orientierte Gerade und $p, q, r \in g$ paarweise verschieden. Wir definieren eine Relation $\mathcal{Z} \subset g \times g \times g$ durch*

$$\mathcal{Z}(p, q, r) :\Leftrightarrow p < q < r \vee r < q < p.$$

\mathcal{Z} heißt **Zwischenrelation**.

Diese Definition und die Transitivität von $<$ liefern folgende Eigenschaften:

Folgerung 2.3.1 *Für alle $p, q, r, s \in \mathcal{P}$, die paarweise verschieden sind, gilt:*

1. $\mathcal{Z}(p, q, r) \Leftrightarrow \mathcal{Z}(r, q, p)$
2. $\mathcal{Z}(p, q, r) \wedge \mathcal{Z}(q, r, s) \Rightarrow \mathcal{Z}(p, q, s) \wedge \mathcal{Z}(p, r, s)$

Durch das nächste Axiom wird ein starker Eingriff in die Struktur der Geraden unserer Geometrien vorgenommen: Endliche Geraden werden dieses Axiom nicht erfüllen und damit sind als Folge auch endliche Geometrien ausgeschlossen.

Axiom 5 *Für jede orientierte Gerade $(g, <)$ und beliebige $q \in g$ existieren stets Punkte $p, r \in g$ mit $\mathcal{Z}(p, q, r)$.*

Durch die Linearität von $<$ auf g ist ausgeschlossen, daß $(g, <)$ ein unter graphentheoretischer Anschauung ein Kreis ist, und wäre g endlich, so existierten für den $<$ -maximalen (bzw. minimalen Punkt) keine Punkte zwischen denen dieser liegt.

Axiom 6 *(Axiom der Diskretheit) Es seien $p, r \in \mathcal{P}$ paarweise verschieden. Dann existieren höchstens endlich viele Punkte q mit $\mathcal{Z}(p, q, r)$.*

Dieses Axiom vervollständigt unsere Vorstellung einer diskreten Geometrie. Alle Geometrien, deren Geraden unendlich viele Punkte zwischen zwei Punkten zulassen, wie es beispielsweise bei den euklidischen der Fall ist, fallen damit als Modelle weg. Es wird ein weiteres Mal deutlich, warum man nicht fordern konnte, daß zwei Geraden mindestens einen Schnittpunkt besitzen: Angenommen dies wäre möglich, so könnte man nach Axiom 6 zwei Punkte p, q einer Geraden g finden, zwischen denen kein weiterer Punkt liegt. Es seien nun h und h' zwei parallele Geraden durch p bzw. q . Mindestens eine der Geraden durch einen der Punkte von $h \setminus \{p\}$ und einen von $h' \setminus \{q\}$ würde dann g in einem Punkt schneiden, der zwischen p und q liegt. Das ist ein Widerspruch.

Folgerung 2.3.2 *Jede Gerade besitzt genau abzählbar unendlich viele Punkte. Für jede geordnete Gerade $(g, <)$ existiert eine Abbildung $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow g$ mit $i < j \Leftrightarrow \varphi(i) < \varphi(j)$ für alle $i, j \in \mathbb{Z}$. Die Geraden können also als geordnete Folge von Punkten $(p_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ aufgefasst werden.*

Beweis. Nach Axiom 5 existiert für jede Gerade g eine abzählbar unendliche Teilmenge $G \subset g$, die als $(p_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ mit $p_i < p_{i+1}$ geschrieben werden kann. Nach Axiom 6 existieren zwischen p_i und p_{i+1} höchstens endlich viele Punkte die in diese Ordnung eingefügt werden können. \square

Bisher hat jede Gerade ihre eigene Zwischenrelation. Um sicherzustellen, daß diese miteinander verträglich sind benötigen wir noch folgendes Axiom:

Axiom 7 *Es seien $g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{G}$ paarweise verschieden und parallel, sowie $g, g' \in \mathcal{G}$ so, daß $p_i := g \cap g_i$ und $p'_i := g' \cap g_i$ existieren. Dann gilt:*

$$\mathcal{Z}(p_1, p_2, p_3) \Leftrightarrow \mathcal{Z}(p'_1, p'_2, p'_3).$$

Folgerung 2.3.3 *Es seien $p, q, r \in \mathcal{P}$ paarweise verschieden und kollinear und $\tau \in \mathcal{T}$. Dann gilt:*

$$\mathcal{Z}(p, q, r) \Rightarrow \mathcal{Z}(\tau(p), \tau(q), \tau(r)).$$

Beweis. Zuerst der Fall, daß $g(p, r) \neq g(\tau(p), \tau(r))$. Nach T3 gilt:

$$g(p, \tau(p)) \parallel g(q, \tau(q)) \parallel g(r, \tau(r)).$$

Diese Geraden sind paarweise verschieden. Mit T1 folgt die Kollinearität von $\tau(p), \tau(q)$ und $\tau(r)$. Somit folgt aus Axiom 6 $\mathcal{Z}(\tau(p), \tau(q), \tau(r))$.

Nun der Fall $g(p, r) = g(\tau(p), \tau(r))$. Man wählt zuerst ein $\sigma \in \mathcal{T}$ mit $g(p, r) \neq g(\sigma(p), \sigma(r))$. Dann liefert der erste Fall $\mathcal{Z}(\sigma(p), \sigma(q), \sigma(r)) \neq \mathcal{Z}(p, q, r)$. Da \mathcal{T} eine abelsche Gruppe ist, existiert ein $\sigma' \in \mathcal{T}$ mit $\sigma' + \sigma = \tau$. Damit haben wir:

$$g(\sigma(p), \sigma(r)) \neq g(\sigma' + \sigma(p), \sigma' + \sigma(r)) = g(\tau(p), \tau(r)),$$

woraus $\mathcal{Z}(\tau(p), \tau(q), \tau(r))$ folgt. \square

Der Axiomatische Apparat aus Zwischenrelation, Diskretheitsaxiom und der Verträglichkeit der Zwischenrelationen hat einen wesentlichen Einfluß auf die Geometrien mit zyklischen Translationen: Diese entfallen als Modelle unserer diskreten Geometrie.

Lemma 2.3.1 *Es gibt keine zyklischen Verschiebungen.*

Beweis. Es seien $\tau \in \mathcal{T}$ ein Translation der Ordnung $n > 2$, p ein Punkt in \mathcal{P} und $\{p_1, \dots, p_n\}$ der Orbit von p unter τ . Für p_1, p_2, p_3 gilt mit Z1:

$$\mathcal{Z}(p_1, p_2, p_3) \dot{\vee} \mathcal{Z}(p_2, p_1, p_3) \dot{\vee} \mathcal{Z}(p_1, p_3, p_2).$$

Aus Z3 folgt: $\mathcal{Z}(p_1, p_2, p_3) \Rightarrow \mathcal{Z}(p_{i-2}, p_{i-1}, p_i)$ für $3 \leq i \leq n$. Und damit sieht man $\mathcal{Z}(p_1, p_2, p_n) \wedge \mathcal{Z}(p_2, p_n, p_1)$, was ein Widerspruch zu Z1 ist. Die anderen zwei Fälle werden analog behandelt.

Für den Fall $n = 2$ sei $p \in \mathcal{P}$ und $g := g(p, \tau(p))$. Nach Folgerung 2.3.2 gilt $g = (p_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ mit $\mathcal{Z}(p_i, p_{i+1}, p_{i+2})$, $i \in \mathbb{Z}$. Folgerung 2.3.3 zeigt, daß ein $j \in \mathbb{Z}$ existiert mit $\tau(p_{j+i}) = p_{j-i+1}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Ohne Einschränkung nehmen wir an, daß $j = 0$. Also $\tau(p_i) = p_{-i+1}$. Wir betrachten nun $\sigma \in \mathcal{T}$ und $p_{2-i} := \sigma(p_{1+i})$. Dann ist $\tau + \sigma(p_i) = p_{2+i}$ und $\tau + \sigma$ nicht zyklisch der Ordnung 2. \square

Der nächste Satz erlaubt uns die Verschmelzung des Translations- und Geradenbegriffes. Es gibt nämlich zu jeder Geraden Translationen, deren \mathbb{Z} -Orbit die Gerade selbst ist.

Satz 2.3.1 *Für jede Gerade g existiert ein $\tau \in \mathcal{T}$, so daß für ein beliebiges aber festes $p \in g$ gilt:*

$$g = \{\tau^i(p) : i \in \mathbb{Z}\}$$

Beweis. Wir zeigen, daß wenn eine Translation existiert, die einen Punkt einer orientierten Geraden auf dessen bezüglich der linearen Ordnung nachfolgenden Punkt der Geraden abbildet, diese Translation einen jeden anderen Punkt der Geraden auch auf seinen direkten Nachfolger abbildet.

Es sei $(g, <)$ eine orientierte Gerade. $g = (p_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ eine Folge mit $p_i < p_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ und es sei $\tau_i \in \mathcal{T}$ mit $\tau_i(p_i) = p_{i+1}$. Wendet man τ_0 auf g an, so folgt aus der Eigenschaft T1 der Translationen und Axiom 3, daß $\tau_0(p_i) \in g$. Wir nehmen nun an, es gäbe ein $i > 0$ mit $\tau_0(p_i) \neq p_{i+1}$. Wir wählen dieses i minimal. Dann existiert $p_k = \tau_0(p_i)$. $k = 0$ ist ausgeschlossen, da τ sonst zyklisch wäre. Also gilt $k > 0$ und damit aus dem selben Grund $k > i+1$. Es gilt also $\mathcal{Z}(p_i, p_{i+1}, p_k)$. Nach Folgerung 2.3.3 gilt $\mathcal{Z}(\tau_0^{-1}(p_i), \tau_0^{-1}(p_{i+1}), \tau_0^{-1}(p_k))$, also $\mathcal{Z}(p_{i-1}, \tau_0^{-1}(p_{i+1}), p_i)$. Dies ist aber ein Widerspruch, da zwischen p_{i-1} und p_i kein weiterer Punkt liegen kann.

Es gelte nun für alle $i \geq 0$, daß $\tau_0(p_i) = p_{i+1}$. Angemommen, es existiert ein maximales $i < 0$ mit $\tau_0(p_i) \neq p_{i+1}$. Dann existiert also ein $p_k = \tau_0(p_{i+1})$ mit $k < i$. Dann gilt $\mathcal{Z}(p_k, p_i, p_{i+1})$ und damit $\mathcal{Z}(\tau_0^{-1}(p_k), \tau_0^{-1}(p_i), \tau_0^{-1}(p_{i+1}))$. Es folgt also abermals ein Widerspruch mit $\mathcal{Z}(p_{i-1}, \tau_0^{-1}(p_{i+1}), p_i)$.

Wir haben nun gezeigt, daß für alle $i \in \mathbb{Z}$ $\tau_0(p_i) = p_{i+1}$. Damit gilt $\tau_i = \tau_j$ für alle $i, j \in \mathbb{Z}$. Also gilt für ein beliebiges $p \in g$: $g = \{i\tau(p) : i \in \mathbb{Z}\}$. \square

Mit dem Fakt, daß \mathcal{T} abelsche Gruppe ist, sieht man die nächste Folgerung leicht ein:

Folgerung 2.3.4 *Es gilt:*

1. Falls $g = \{\tau^i(p) : i \in \mathbb{Z}\}$ und $\tau \in \mathcal{T}$, so gilt: $g = \{(\tau^{-1})^i(p) : i \in \mathbb{Z}\}$.
2. Für alle $g = \{\tau^i(p) : i \in \mathbb{Z}\}$ und $\sigma \in \mathcal{T}$ gilt: $\sigma(g) = \{\tau^i(\sigma(p)) : i \in \mathbb{Z}\}$.
3. Für alle $g = \{\tau^i(p) : i \in \mathbb{Z}\}$ gilt:

$$\mathcal{Z}(\tau^i(p), \tau^j(p), \tau^k(p)) \Leftrightarrow (i < j < k \vee k < j < i).$$

Aus 3. folgt:

Folgerung 2.3.5 *Für alle $\tau \in \mathcal{T}$, $p \in \mathcal{P}$ und $i, j \in \mathbb{Z}$ mit $0 < i < j$ gilt:*

$$\mathcal{Z}(p, \tau^i(p), \tau^j(p))$$

Definition 2.3.3 *Eine Verschiebung $\tau \neq \text{Id}$ heißt **Generator**, wenn sich eine Gerade g in der Form $g = \{\tau^i(p) : i \in \mathbb{Z}\}$ darstellen läßt.*

Folgerung 2.3.6 1. Jede Gerade besitzt zwei Generatoren, τ und τ^{-1} .

2. Zwei Geraden sind genau dann parallel, wenn sie die gleichen Generatoren besitzen.

Definition 2.3.4 *Eine Verschiebung τ heißt **einfach** oder **atomar**, wenn es keine Verschiebung σ gibt, so daß $\sigma^n = \tau$ gilt für ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $|n| \neq 1$.*

Lemma 2.3.2 *Ein $\tau \in \mathcal{T}$ ist genau dann Generator einer Geraden g , wenn τ einfach ist.*

Beweis. Es sei zuerst $\tau \in \mathcal{T}$ einfach und $p \in \mathcal{P}$. Dann gilt: $g(p, \tau(p)) = \{\tau^i(p) : i \in \mathbb{Z}\}$. Nehmen wir an, τ sei kein Generator von g , so existiert ein $\sigma \in \mathcal{T}$ mit $g = \{\sigma^i(p) : i \in \mathbb{Z}\}$ und es gilt $\sigma \neq \tau, \tau^{-1}$. Es existiert aber offenbar ein $j \in \mathbb{Z}$, $|j| \neq 1$ mit $\sigma^j(p) = \tau(p)$, was der Einfachheit von τ widerspricht.

Um die andere Richtung der Behauptung zu beweisen, nehmen wir an, $\tau \in \mathcal{T}$ sei nicht einfach. Dann existiert ein $\sigma \in \mathcal{T}$ mit $\sigma^j = \tau$ für ein $j \in \mathbb{Z}$, $|j| \neq 1$. Dann liegen zwei Fälle vor: $j = 0$ zeigt, daß τ die Identität auf \mathcal{T} und damit kein Generator ist und $j > 1$ (o.B.d.A) liefert mit Folgerung 2.3.5, daß $\mathcal{Z}(p, \sigma^1(p), \sigma^j(p))$. Damit liegt zwischen p und $\tau(p) = \sigma^j(p)$ mindestens ein Punkt, womit τ kein Generator von $g(p, \tau(p))$ und auch von keiner anderen Geraden ist. \square

2.4 Konvexität

Der Begriff der konvexen Menge soll in diesem Abschnitt untersucht werden. Dieser ist im diskreten Fall nicht so einfach zu fassen, wie im Kontinuierlichen. Die Forderung, daß die Strecke zwischen zwei Punkten einer konvexen Menge Teilmenge dieser Menge ist reicht nicht aus, eine vollständige Charakterisierung zu ermöglichen.

Definition 2.4.1 $M \subset \mathcal{P}$ heißt **abgeschlossen bezüglich \mathcal{Z}** , wenn für $p, r \in M$ und $q \in \mathcal{P}$ gilt:

$$\mathcal{Z}(p, q, r) \Rightarrow r \in M.$$

Alle Geraden sind abgeschlossen bezüglich \mathcal{Z} . Es existieren aber noch mehr Mengen dieser Art:

Definition 2.4.2 1. Jede endliche bezüglich \mathcal{Z} abgeschlossene Teilmenge S einer Geraden g heißt **Strecke**.

2. Jede unendliche bezüglich \mathcal{Z} abgeschlossene echte Teilmenge R einer Geraden g heißt **Strahl**.

Einige leicht zu beweisende Fakten über Strecken und Strahlen sind in der nächsten Folgerung zusammengefasst.

- Folgerung 2.4.1** 1. Jede Strecke $S \subset g$ kann als endliche geordnete Folge $S = (p_1, \dots, p_k)$ aufeinander folgender Punkte der Geraden g dargestellt werden.
2. Jeder Strahl $R \subset g$ kann als unendliche geordnete Folge $R = (p_i)_{i \in \mathbb{Z}^+}$ aufeinander folgender Punkte der Geraden g dargestellt werden.
3. Durch zwei Punkte $p, q \in \mathcal{P}$ ist eindeutig eine Strecke $S = pq$ mit den Endpunkten p und q bestimmt.
4. Auf einer Geraden g existieren für jeden Punkt p genau zwei Strahlen mit dem Anfangspunkt p . Diese haben p gemeinsam und heißen entgegengesetzt.
5. Durch zwei Punkte $p, q \in \mathcal{P}$ wird eindeutig ein Strahl $R = pq^+$ mit dem Anfangspunkt p bestimmt, der den Punkt q enthält. Der pq^+ entgegengesetzte Strahl ist pq^- . Es gilt:

$$pq^+ \cup pq^- = g \quad \text{und} \quad pq^+ \cap pq^- = \{p\}.$$

Folgerung 2.4.2 Für Jede Verschiebung τ gilt:

1. Es sei $S = pq$ eine beliebige Strecke. Dann ist $\tau(S)$ wieder eine Strecke und es gilt $\tau(S) = \tau(p)\tau(q)$.
2. Es sei $R = pq^+$ bzw. $R = pq^-$ ein Strahl. Dann ist $\tau(R)$ wieder ein Strahl und es gilt $\tau(R) = \tau(p)\tau(q)^+$ bzw. $\tau(R) = \tau(p)\tau(q)^-$.

Definition 2.4.3 Zwei Teilmengen M und N von \mathcal{P} heißen **verschiebungsgleich**, wenn ein $\tau \in \mathcal{T}$ existiert mit $\tau(M) = N$.

Die Verschiebungsgleichheit von Geraden entspricht gerade der Parallelenrelation. Allgemeiner noch ist der Verschiebungsgleichheit eine Äquivalenzrelation, deren Äquivalenzklassen **Richtungssinne** heißen. Entgegengesetzte Strahlen haben verschiedene Richtungssinne. Richtungssinne heißen entgegengesetzt, wenn es zu einem Strahl aus einem Richtungssinn einen entgegengesetzten Strahl aus dem anderen Richtungssinn gibt. Eine Richtung korrespondiert mit zwei entgegengesetzten Richtungssinnen.

Definition 2.4.4 Eine Menge $M \subset \mathcal{P}$ heißt **konvex**, wenn M bezüglich \mathcal{Z} abgeschlossen ist.

Man sieht leicht, daß \mathcal{P} und \emptyset , sowie Geraden, Strecken und Strahlen konvex sind. Über den Durchschnitt konvexer Mengen läßt sich sagen:

Lemma 2.4.1 *Die Menge der konvexen Mengen über \mathcal{P} ist durchschnitts abgeschlossen.* \square

Definition 2.4.5 *Für eine Menge $M \subset \mathcal{P}$ ist $CH(M)$ die kleinste konvexe Menge, die M enthält. $CH(M)$ heißt die **konvexe Hülle** von M .*

Lemma 2.4.2 *Für $M \subset \mathcal{P}$ gilt:*

$$CH(M) = \bigcap \{N \subset \mathcal{P} : M \subset N \wedge N \text{ konvex}\}.$$

\square

2.5 Planarität

Die bisherige Beschreibung der Geometrie behandelte nur die Begriffe der Punkte und der Geraden. Um zu einem höherdimensionalen Begriff zu kommen ist es sinnvoll Ebenen in die Betrachtung aufzunehmen. Ein erster Schritt ist mit Axiom 7 schon gemacht worden, denn Ebenen sollten sich in der Intuition als von zwei Geraden aufgespanntes Gitter beschreiben lassen. Wir nutzen nun den Generatorenbegriff, um eine allgemeine Vorstufe einer diskreten Ebene einzuführen. Das dieser aber viel allgemeiner ist, als wir ihn benötigen werden, wird sich später zeigen.

Definition 2.5.1 *Es seien $p \in \mathcal{P}$ und $\sigma, \tau \in \mathcal{T}$. Dann heißt*

$$G(p, \sigma, \tau) := \{q \in \mathcal{P} : q = \sigma^i \tau^j(p) = (\sigma^i \circ \tau^j)(p), i, j \in \mathbb{Z}\}$$

*das durch p, σ und τ aufgespannte **planare Gitter**.*

Für einen Punkt q eines planaren Gitters $G(p, \sigma, \tau)$ gilt

$$G(q, \sigma, \tau) = G(p, \sigma, \tau).$$

Lemma 2.5.1 *Es seien $p_1, p_2, p_3 \in G(p, \sigma, \tau)$, $g_1 = g(p_1, p_2)$ und $g_2 \parallel g_1$ mit $p_3 \in g_2$. Dann existiert ein Punkt $p_4 \in G(p, \sigma, \tau)$ mit $g_2 = g(p_3, p_4)$.*

Beweis. Aus $p_1 \in G(p, \sigma, \tau)$ folgt $G(p_1, \sigma, \tau) = G(p, \sigma, \tau)$. Damit existieren ganze Zahlen k und l , so daß sich p_2 darstellen läßt als $\sigma^k \tau^l(p_1)$. p_3 ist ebenfalls ein Punkt von $G(p_1, \sigma, \tau)$. Also kann man $p_4 = \sigma^k \tau^l(p_3)$ wählen. Somit ist nun $g(p_3, p_4)$ parallel zu g_1 und gleich der Geraden g_2 . \square

Das Tripel (p, σ, τ) kann als $G(p, \sigma, \tau)$ erzeugendes Koordinatensystem mit dem Ursprung p interpretiert werden. Einem Punkt $q \in G(p, \sigma, \tau)$ können die Koordinaten $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ mittels der Abbildung $\varphi : \mathbb{Z}^2 \rightarrow G(p, \sigma, \tau)$, die durch $(x, y) \mapsto \sigma^x \tau^y(p)$ definiert ist, zugewiesen werden. Die Achsen des Koordinatensystems sind die beiden Geraden $g_x := \varphi(x, 0)$ und $g_y := \varphi(0, y)$. Für eine Teilmenge Q von \mathcal{P} seien die Einschränkungen $\mathcal{G}_{|Q}$ und $\mathcal{T}_{|Q}$ der Geradenmenge bzw. der Translationenmenge im üblichen Sinne erklärt.

Satz 2.5.1 *Für jedes planare Gitter $P = G(p, \sigma, \tau)$ genügt das Tripel $G = (P, \mathcal{G}_{|P}, \mathcal{T}_{|P})$ den Axiomen 1 bis 7. G ist also eine diskrete Geometrie.*

Beweis. Nach Konstruktion von P und Definition von $\mathcal{G}_{|P}$ und $\mathcal{T}_{|P}$ ist diese Erkenntnis klar. \square

Lemma 2.5.2 *Es seien $p_1, p_2 \in G = G(p, \sigma, \tau)$ und $\sigma' \in \mathcal{T}_{|G}$ ein Generator von $g(p_1, p_2) \in \mathcal{G}_{|G}$. Dann existiert ein $\tau' \in \mathcal{T}_{|G}$, so daß gilt $G = G(p, \sigma', \tau')$.*

Beweis. Es sei σ' ein Generator von $g(p_1, p_2) \in \mathcal{G}_{|G}$. Es existieren also teilerfremde ganze Zahlen a, b mit $\sigma' = \sigma^a \tau^b$. O.B.d.A. gelte $a < b$. Die Teilerfremdheit von a und b liefert die Existenz zweier ganzer Zahlen c, d mit $ad - bc = 1$. Wir setzen $\tau' := \sigma^c \tau^d$. Für ein beliebigen Punkt $q \in G$ mit $q = \sigma^i \tau^j$ und $i, j \in \mathbb{Z}$ gilt nun $q = (\sigma'^{(id-cj)} \tau'^{(aj-ib)})(p)$ und damit $G(p, \sigma', \tau') \subset G$, während die Inklusion $G \subset G(p, \sigma', \tau')$ nach Voraussetzung über σ' und τ' gilt. \square

Folgerung 2.5.1 *In einem Planaren Gitter $G = G(p, \sigma, \tau)$ existiert zu jeder Gerade $g \in \mathcal{G}_{|G}$ eine geeignete Gerade $g' \in \mathcal{G}_{|G}$, so daß g und g' Achsenpaar eines G erzeugenden Koordinatensystems sind.*

Definition 2.5.2 *Ein planares Gitter G ist **Untergitter** eines planaren Gitters G' , wenn $G \subset G'$ gilt.*

Definition 2.5.3 Zwei planare Gitter G und G' heißen **isomorph**, wenn eine Bijektion $\varphi : G \rightarrow G'$ existiert mit $\mathcal{Z}(p_1, p_2, p_3) \Leftrightarrow \mathcal{Z}(\varphi(p_1), \varphi(p_2), \varphi(p_3))$ für alle $p_1, p_2, p_3 \in G$.

Folgerung 2.5.2 1. Je zwei planare Gitter sind isomorph.

2. Eine Bijektion zwischen planaren Gittern ist ein Isomorphismus, wenn sie die Parallelenrelation invariant läßt.

3. Ein Isomorphismus zwischen zwei Gittern ist durch die seine Bilder der erzeugenden Translationen σ und τ eindeutig bestimmt.

Definition 2.5.4 Es seien g_1, g_2, g_3 paarweise verschiedene parallele Geraden. g_2 liegt zwischen g_1 und g_3 , $\mathcal{Z}(g_1, g_2, g_3)$, wenn es eine Verschiebung τ und natürliche Zahlen i, j gibt mit $\tau^i(g_1) = g_2$ und $\tau^j(g_2) = g_3$.

Lemma 2.5.3 Für drei paarweise verschiedene Geraden g_1, g_2 und g_3 , die in Relation $\mathcal{Z}(g_1, g_2, g_3)$ stehen, kann weder $\mathcal{Z}(g_1, g_3, g_2)$ noch $\mathcal{Z}(g_2, g_1, g_3)$ gelten.

Beweis. Wir nehmen an, es gelte $\mathcal{Z}(g_1, g_2, g_3)$ oder $\mathcal{Z}(g_1, g_3, g_2)$. Dann existieren $\tau, \sigma \in \mathcal{T}$ und $i, j, k, l \in \mathbb{N}$ mit $\tau^i(g_1) = g_2$, $\tau^j(g_2) = g_3$ und $\sigma^k(g_1) = g_3$, $\sigma^l(g_3) = g_2$.

Wir wählen nun ein $p_1 \in g_1$ und definieren $p_2 := \tau^i(p_1)$, $p_3 := \tau^j(p_2)$ und $p'_2 := \sigma^k(p_1)$, $p'_3 := \sigma^l(p'_2)$. Es sind p_1, p_2, p_3 und p_1, p'_2, p'_3 offensichtlich kollinear. Nach Axiom 7 gilt $\mathcal{Z}(p_1, p_2, p_3)$ genau dann, wenn $\mathcal{Z}(p_1, p'_2, p'_3)$ gilt, wegen $p_2, p'_2 \in g_2$ und $p_3, p'_3 \in g_3$. Dies widerspricht aber Folgerung 2.3.5. Analog folgt der Rest des Lemmas. \square

Lemma 2.5.4 Für die paarweise verschiedene Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 folgt aus $\mathcal{Z}(g_1, g_2, g_3)$ und $\mathcal{Z}(g_2, g_3, g_4)$ auch $\mathcal{Z}(g_1, g_2, g_4)$ und $\mathcal{Z}(g_1, g_3, g_4)$.

Beweis. Aus $\mathcal{Z}(g_1, g_2, g_3)$ und $\mathcal{Z}(g_2, g_3, g_4)$ folgt die Existenz zweier Translationen τ und σ und natürlicher Zahlen i, j, k, l mit $\tau^i(g_1) = g_2$, $\tau^j(g_2) = g_3$ und $\sigma^k(g_2) = g_3$, $\sigma^l(g_3) = g_4$. Es sei nun $p \in g_2$. Wir zeigen: g_1, \dots, g_4 haben jeweils zwei Punkte mit dem planaren Gitter $G = G(p, \sigma, \tau)$ gemein. Die Punkte $p_1 := \tau^j(p)$ und $p_2 := \sigma^k(p)$ liegen in g_3 . In g_1 liegt der Punkt $p_3 := \tau^{-i}(p)$ und in g_4 $p_4 := \sigma^{(k+l)}(p)$. Somit haben g_1, g_3, g_4 mit G jeweils

einen Punkt gemein und sind parallel zu g_2 . Nach Folgerung 2.5.1 existieren Punkte $p', p'_3, p'_4 \in G$ mit $g_1 = g(p_3, p'_3)$, $g_2 = g(p, p')$ und $g_4 = g(p_4, p'_4)$. Es sei g'_1 der Durchschnitt von g_1 mit G und τ' ein Generator von g'_1 . Aus Lemma 2.5.2 folgt nun die Existenz von $\sigma \in \mathcal{T}$ mit dem sich G schreiben läßt als $G(p, \tau', \sigma')$. Nun kann G offenbar dargestellt werden als $\{\sigma'^i(g'_1) : i \in \mathbb{Z}\}$, also lassen sich g_2, g_3 und g_4 als Verschiebungen von g'_1 um geeignete Vielfache von σ' auffassen und die Behauptung ist bewiesen. \square

Folgerung 2.5.3 *Es seien g_1, \dots, g_n paarweise verschiedene parallele Geraden, von denen je drei in Zwischenrelation stehen. Dann existiert ein $\tau \in \mathcal{T}$ und $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}$ mit $g_{j+1} = \tau^{i_j}(g_j)$ für $j \in \{1, \dots, n-1\}$.* \square

Definition 2.5.5 *Eine Menge $M \subset \mathcal{P}$ heißt **planar**, wenn M nichtkollineare dreielementige Punktmengen enthält und für je vier Punkte $p_1, \dots, p_4 \in M$ die **Planaritätsforderung** gilt:*

Wenn die Geraden g_1, g_2, g_3 mit $g_1 := g(p_1, p_2)$, $g_2 \parallel g_1$ mit $p_3 \in g_2$ und $g_3 \parallel g_1$ mit $p_4 \in g_3$ paarweise verschieden sind, so befinden sie sich in Zwischenrelation.

Die Planaritätsforderung garantiert für planare Mengen den Rang 2. Somit bildet jede planare Menge, die die Axiome 1 bis 7 erfüllt eine Geometrie vom Rang 2.

Folgerung 2.5.4 *Jedes planare Gitter ist eine planare Menge.*

Beweis. Es sei $G = G(p, \sigma, \tau)$ ein planares Gitter. Dann ist $\{p, \sigma(p), \tau(p)\}$ eine dreielementige Menge nichtkollinearer Punkte. Es muß also nicht für $p_1, \dots, p_4 \in G$ die Planaritätsforderung bewiesen werden. Die Geraden $g_1 := g(p_1, p_2)$, $g_2 \parallel g_1$ mit $p_3 \in g_2$ und $g_3 \parallel g_1$ mit $p_4 \in g_3$ seien paarweise verschieden. Dann ist analog zum Beweis von Lemma 2.5.4 das Gitter G darstellbar als $G(p, \sigma', \tau')$, wobei τ' Generator von g_1 auf G und σ' eine passende Verschiebung ist, für die sich g_2 und g_3 als Bilder passender Vielfacher von σ angewandt auf g_1 darstellen lassen. \square

Die Umkehrung dieser Aussage ist im bisherigen Axiomensystem nicht beweisbar. Wie das Gegenbeispiel aus Abschnitt 2.7 zeigen wird, gilt die Umkehrung dieser Aussage nicht.

2.6 Ebenen und Halbebenen

In Analogie zu den bezüglich der Zwischenrelation auf Punkten abgeschlossenen Mengen sind planare Mengen als bezüglich der Zwischenrelation auf Geraden abgeschlossenen Mengen aufzufassen. In diesem Abschnitt werden die wesentlichen planaren Mengen, die Ebenen und die Halbebenen untersucht.

Definition 2.6.1 Eine Menge $E \subset \mathcal{P}$ heißt **Ebene**, wenn sie eine maximale planare Menge ist, das heißt E ist planar und $E \cup \{p\}$ ist nicht planar für jeden Punkt $p \in \mathcal{P} \setminus E$.

Lemma 2.6.1 1. Zu jeder planaren Menge M existiert genau eine Ebene E mit $M \subset E$

2. Für je zwei Punkte $p, q \in E$ gilt $g(p, q) \subset E$.

3. Für verschiedenen Ebenen E_1, E_2 mit verschiedenen $p, q \in E_1 \cap E_2$, gilt: $E_1 \cap E_2 = g(p, q)$.

Beweis. 1. Wir zeigen für eine planare Menge $M \subset \mathcal{P}$, die drei nicht-kollineare Punkte p_1, p_2, p_3 enthält, daß für ein beliebiges $p \in \mathcal{P}$ die Menge $M \cup \{p\}$ planar ist, wenn $\{p_1, p_2, p_3, p\}$ planar ist. Liegt p in M , ist nichts mehr zu zeigen. Ist p kein Element von M so bleibt für beliebige $q_1, q_2, q_3 \in M$ und p die Planaritätsbedingung zu beweisen. Es seien $g_1 := g(p_1, p_2)$, $g_3 \parallel g_1$ mit $p \in g_3$, $g_2 \parallel g_1$ mit $p_3 \in g_2$, $g_3 \parallel g_1$ mit $q_1 \in g_3$, $g_4 \parallel g_1$ mit $q_2 \in g_4$ und $g_5 \parallel g_1$ mit $q_3 \in g_5$, o.B.d.A. verschieden. Die Mengen M und $\{p_1, p_2, p_3, p\}$ sind nach Voraussetzung planar, womit $\mathcal{Z}(g_1, g_2, g)$ gilt und auch g_1, \dots, g_5 in Zwischenrelation zueinander stehen. Wegen der Transitivität von \mathcal{Z} und der Folgerung 2.5.3 existieren eine Verschiebung τ und ganze Zahlen i_1, \dots, i_5 , so daß $g_j = \tau^{i_j}(g)$ für $i = 1, \dots, 5$. Ist σ ein Generator von g so liegen alle Punkte der Geraden g, g_1, \dots, g_5 im planaren Gitter $G = G(p, \sigma, \tau)$, welches eine planare Menge ist. Damit ist die Planaritätsbedingung für $\{g_1, g_2, g_3, p\}$ erfüllt. Die Menge

$$E := M \cup \{p \in \mathcal{P} : \{p_1, p_2, p_3, p\} \text{ planar}\}$$

ist somit eine maximale planare Menge also eine Ebene. Sie umfasst M .

2. Es seien E eine Ebene, $p, q \in E$ zwei Punkte, τ ein Generator von $g := g(p, q)$ und $\sigma \in \mathcal{T}$ mit $\sigma(p) \in E \setminus g$. Dann liegt g im planaren Gitter $G(p, \sigma, \tau)$,

welches Teilmenge der Ebene E ist, da E eine maximale planare Menge ist, die $\{p, q\}$ enthält.

3. Es seien $E_1 \neq E_2$ Ebenen deren Schnitt zwei Punkte p und q enthält. Nach 2. liegt die Gerade $g(p, q)$ sowohl in E_1 als auch in E_2 und damit in deren Durchschnitt. Um die umgekehrte Inklusion zu beweisen, nehmen wir an, es existiert ein Punkt r im Schnitt von E_1 und E_2 , der nicht auf $g(p, q)$ liegt. Dann wäre $\{p, q, r\}$ eine planare Menge, woraus nach Aussage 1. die Gleichheit von E_1 und E_2 folgte. Das widerspricht der Voraussetzung. \square

Satz 2.6.1 *Es sei E eine Ebene. Dann genügt das Tripel $(E, \mathcal{G}_{|E}, \mathcal{T}_{|E})$ den Axiomen 1 bis 7. Dabei seien die Ordnungsrelationen und die Parallelenrelation auf den Geraden entsprechend eingeschränkt.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß eine Verschiebung $\tau \in \mathcal{T}_{|E}$ die Forderungen T1 bis T3 erfüllt. τ ist genau dann in $\mathcal{T}_{|E}$, wenn ein $\tau' \in \mathcal{T}$ existiert, daß für alle $p \in E$ die Gleichung $\tau(p) = \tau'(p)$ erfüllt und für zwei verschiedene $q, r \in E$ gilt $\tau(q) = r$.

Es sei nun s ein Punkt der Ebene. Dann liegen alle Punkte der Geraden $g(s, \tau(s))$ in der Ebene, da für ein $t \in g(s, \tau(s))$ die Punkte q, r, s, t die Planaritätsforderung erfüllen. Damit liegt mit $\tau(s)$ auch $\tau^{-1}(s)$ in E , τ ist also Bijektion auf E . Da $\tau \neq \text{Id}$ sind T1 bis T3 erfüllt.

Der Nachweis der Gültigkeit der Axiome 1 bis 7 ist nun trivial. \square

Definition 2.6.2 *Es seien E eine Ebene und $g \in \mathcal{G}_{|E}$. Zwei Punkte $p, q \in E \setminus g$ liegen auf derselben Seite von g , in Zeichen $p \leftrightarrow_g q$, wenn für $g_1, g_2 \in \mathcal{G}_{|E}$ mit $g_1, g_2 \parallel g$ und $p \in g_1, q \in g_2$ gilt: $g_1 = g_2$, $\mathcal{Z}(g, g_1, g_2)$ oder $\mathcal{Z}(g, g_2, g_1)$.*

Offensichtlich ist \leftrightarrow_g eine Äquivalenzrelation auf $E \setminus g$.

Lemma 2.6.2 *Für eine Ebene E und eine Gerade $g \in \mathcal{G}_{|E}$ zerlegt \leftrightarrow_g die Menge $E \setminus g$ in genau zwei Äquivalenzklassen.*

Beweis. Es sei $\tau \in \mathcal{T}_{|E}$ mit $\tau(g) \neq g$. Dann liegen für alle $p \in g$ die Punkte $\tau(p)$ und $\tau^{-1}(p)$ auf verschiedenen Seiten von g . Es existieren also wenigstens zwei Äquivalenzklassen. Nun seien p, q, r drei paarweise verschiedene Punkte aus $E \setminus g$ mit drei parallelen Geraden $g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{G}_{|E}$ durch diese

Punkte. Es sind damit $\mathcal{Z}(g_1, g, g_2)$, $\mathcal{Z}(g_1, g, g_3)$ und $\mathcal{Z}(g_2, g, g_3)$ nicht gleichzeitig erfüllt, sonst widerspräche $\neg\mathcal{Z}(g_1, g, g_2) \wedge \neg\mathcal{Z}(g_1, g, g_3) \wedge \neg\mathcal{Z}(g_2, g, g_3)$ mit Lemma 2.5.4 der Planarität von E . Damit kann \leftrightarrow_g nicht mehr als zwei Äquivalenzklassen besitzen. \square

Definition 2.6.3 Wir nennen die zwei Äquivalenzklassen von \leftrightarrow_g die durch g induzierten Halbebenen. Für einen Punkt $p \in E \setminus g$ ist $h^+(g, p)$ ($h^-(g, p)$) die offene Halbebene bezüglich g , die p (nicht) enthält. $H^+(g, p) := h^+(g, p) \cup g$ und $H^-(g, p) := h^-(g, p) \cup g$ sind die entsprechenden abgeschlossenen Halbebenen.

Lemma 2.6.3 Jede Halbebene ist eine konvexe Menge.

Beweis. Es seien p und q zwei Punkte einer Halbebene h , die durch eine Gerade g erzeugt wird. Kein Punkt r der Geraden g liegt zwischen p und q . Wir nehmen an, es existiert ein Punkt r in $h^-(g, p)$ mit $\mathcal{Z}(p, r, q)$. Dann existieren drei parallele Geraden g_1, g_2, g_3 mit $p \in g_1$, $q \in g_2$ und $r \in g_3$. Es gilt also $\mathcal{Z}(g_1, g_3, g_2)$, aber auch $\mathcal{Z}(g_1, g, g_3)$, da $g_1 \subset h^+(g, p)$ und $g_3 \subset h^-(g, p)$. Nach Lemma 2.5.4 läge dann auch g zwischen g_1 und g_2 , was der Voraussetzung $p, q \in h$ widerspricht.

Für den Fall, daß p und q in einer abgeschlossenen Halbebene H liegen, gelten die selben Beziehungen wie im Fall der offenen Halbebene, auch wenn höchstens einer der Punkte p, q in g liegt. Liegen beide Punkte auf g , so ist für jedes r mit $\mathcal{Z}(p, r, q)$ der Punkt r ein Element der Geraden g und somit Element von H . \square

Nicht alle planaren konvexen Mengen lassen sich als Durchschnitt von Halbebenen darstellen, wie Abbildung 2.1 verdeutlicht. Es ist daher notwendig einen stärkeren Konvexitätsbegriff einzuführen.

Definition 2.6.4 Eine Menge $M \subset E$ heißt **streng konvex**, wenn $M = E$ oder wenn sich M als Durchschnitt von Halbebenen darstellen läßt.

Folgerung 2.6.1 Jede streng konvexe Menge ist konvex. \square

Definition 2.6.5 Eine Teilmenge M einer Eben E heißt **D-konvex** (Dreieckskonvex), wenn M eine konvexe Teilmenge einer Geraden ist oder wenn für je drei nichtkollineare Punkte p, q und r aus M gilt:

$$H^+(g(p, q), r) \cap H^+(g(p, r), q) \cap H^+(g(q, r), p) \subset M$$

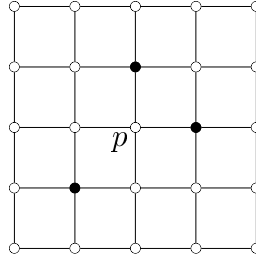


Abbildung 2.1: Die durch die schwarzen Punkte dargestellte Menge ist nach Definition konvex, läßt sich aber nicht als Durchschnitt von Halbebenen darstellen, da diese notwendigerweise den Punkt p enthielten.

Lemma 2.6.4 *Es gilt:*

1. *Jede streng konvexe Menge ist D-konvex.*
2. *Jede D-konvexe Menge ist konvex.*

Beweis. Man überlegt sich leicht, daß eine Halbebene H genau dann drei paarweise verschiedene Punkte p, q, r enthält, wenn gilt:

$$D(p, q, r) := H^+(g(p, q), r) \cap H^+(g(p, r), q) \cap H^+(g(q, r), p) \subset H.$$

1. Es sei M eine streng konvexe Menge. Dann existiert ein System von Halbebenen \mathcal{H} mit $M = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$. Für alle dreielementigen Teilmengen $\{p, q, r\}$ von M liegen diese in jedem dieser H . Da $D(p, q, r) \subset H$ für solche H ist, ist auch $D(p, q, r)$ eine Teilmenge von M und M somit D-konvex.

2. M sei eine D-konvexe Menge. Ist M eine D-konvexe Teilmenge einer Geraden, so ist nichts zu zeigen. Enthält M hingegen nichtkollineare dreipunktige Mengen $\{p, q, r\}$, so ist $D(p, q, r) \subset M$ und folglich ist mit $pq \subset D(p, q, r) \subset M$ die Menge M konvex. \square

2.7 Ein wichtiges Beispiel

An diesem Punkt der Diskussion Hübblers Axiomensystems könnte man meinen, alle diskreten Ebenen beschrieben zu haben und daß die Unterscheidung von offenen und abgeschlossenen Halbebenen sowie von streng konvexen

und D-konvexen Mengen formale Spitzfindigkeiten sind, die in einer planaren Menge, wie die Menge \mathbb{Z}^2 eine ist, ohnehin nicht sinnvoll sind. Dem ist nicht so. In diesem Abschnitt werden wir eine planare Menge $\mathbb{Z}^2 \subset \mathcal{H} \subset \mathbb{R}^2$ konstruieren, die die Axiome 1 bis 7 erfüllt, aber dennoch nicht unserer Vorstellung einer diskreten Geometrie entspricht. \mathcal{H} liegt dicht in der euklidischen Ebene und zwischen zwei parallelen Geraden von \mathcal{H} liegen unendlich viele weitere parallele Geraden von \mathcal{H} . Dies zeigt, daß das Diskretheitsaxiom 6 nicht ausreicht die Diskretheit der höherdimensionaler Unterräume dieser Geometrien zu implizieren.

Wir beginnen mit der induktiven Konstruktion der Menge \mathcal{H} . Dazu betrachten wir folgende Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, die durch die folgende Matrix beschrieben ist:

$$\varphi = d \cdot \begin{pmatrix} x/z & -y/z \\ y/z & x/z \end{pmatrix}$$

Dabei sei (x, y, z) ein primäres pythagoräisches Tripel, das heißt es gilt $x^2 + y^2 = z^2$. x, y, z sind paarweise teilerfremd und keines der x, y, z ist identisch 0. Weiterhin wählen wir $d := 1/z$.

Die Menge \mathcal{H}_0 sei \mathbb{Z}^2 . Jede weitere Menge \mathcal{H}_{i+1} ist als $\varphi(\mathcal{H}_i)$ definiert. Die Translationen \mathcal{T}_i ist die Einschränkung der Translationen $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$ von \mathbb{R}^2 auf \mathcal{H}_i und die Geradenmenge erhält man wie folgt aus den Geraden $\mathcal{G}_{\mathbb{R}^2}$ in \mathbb{R}^2 :

$$\mathcal{G}_i := \{g : g = g' \cap \mathcal{H}_i \wedge g' \in \mathcal{G}_{\mathbb{R}^2} \wedge |g| > 1\}$$

Wir betrachten die Translationen als Mengen von Paaren von Punkten, die aufeinander abgebildet werden.

Für alle natürlichen Zahlen i sind die Punkte

$$o := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Elemente von \mathcal{H}_i . Die Menge \mathcal{H}_i kann mit den Definitionen $\sigma_i(o) := \varphi^i(e_1)$ und $\tau_i(o) := \varphi^i(e_2)$ als planares Gitter $G(o, \sigma_i, \tau_i)$ beschrieben werden.

Behauptung 2.7.1 *Für alle natürlichen Zahlen i gilt:*

1. $\mathcal{H}_i \subset \mathcal{H}_{i+1}$
2. Für jede Gerade $g \in \mathcal{G}_i$ existiert ein $g' \in \mathcal{G}_{i+1}$ mit $g \subset g'$.
3. Für jede Translation $\tau \in \mathcal{T}_i$ existiert ein $\tau' \in \mathcal{T}_{i+1}$ mit $\tau \subset \tau'$.

Beweis. 1. Wir benutzen Induktion über i . $i = 0$: Die Umkehrabbildung von φ läßt sich wie folgt darstellen:

$$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

Die Vereinfachung ergibt sich durch $d = 1/z$. Es gilt also für ein $p \in \mathcal{H} = \mathbb{Z}^2$. Damit liegt $\varphi^{-1}(p)$ wieder in $\mathbb{Z}^2 = \mathcal{H}_0$. Weiterhin liegt damit p auch in \mathcal{H}_1 , da es Bild eines Punktes aus \mathcal{H}_0 ist. Es gilt $\mathcal{H}_0 \neq \mathcal{H}_1$, da $\varphi(e_1) \notin \mathcal{H}_0$.

Für $i > 0$ ist zu zeigen, daß $\mathcal{H}_{i+1} \subset \mathcal{H}_{i+2}$ gilt. Jeder Punkt p aus \mathcal{H}_{i+1} hat ein Urbild in \mathcal{H}_i . Es ist $p = \varphi(p')$ für ein $p' \in \mathcal{H}_i \subset \mathcal{H}_{i+1}$. Damit liegt nach Definition von \mathcal{H}_{i+2} der Punkt p auch in \mathcal{H}_{i+2} . Wegen $\varphi(\varphi^{i+1}(e_1)) \in \mathcal{H}_{i+2} \setminus \mathcal{H}_{i+1}$ gilt die Ungleichheit beider Mengen. Die Punkte 2. und 3. folgen aus 1. \square

Wir können nun definieren:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &:= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_i \\ \mathcal{G} &:= \{g : g = g' \cap \mathcal{H}_i \wedge g' \in \mathcal{G}_{\mathbb{R}^2} \wedge |g| > 1\} \\ \mathcal{T} &:= \{\tau : \tau = \tau' \cap \mathcal{H}_i \wedge \tau' \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2} \wedge \tau \neq \emptyset\} \\ \mathcal{Z} &:= \text{Einschränkung von } \mathcal{Z}_{\mathbb{R}^2} \text{ auf } \mathcal{H} \\ \parallel &:= \text{Einschränkung von } \parallel_{\mathbb{R}^2} \text{ auf } \mathcal{H} \end{aligned}$$

Mit diesen Definitionen gilt:

Behauptung 2.7.2 *Das Tripel $(\mathcal{H}, \mathcal{G}, \mathcal{T})$ mit den Relationen \mathcal{Z} und \parallel genügt den Axiomen 1 bis 7.*

Beweis. Die Axiome 1 bis 5 und 7 sind nach den Definitionen von \mathcal{H} , \mathcal{G} und \mathcal{T} einfach nachzuweisen. Es ist also noch Axiom 6 zu überprüfen. Wir zeigen:

1. Zu zwei verschiedenen Punkten $p, r \in \mathcal{H}$ existieren höchstens endlich viele Punkte $q \in \mathcal{H}$ mit $\mathcal{Z}(p, q, r)$. Dies ist aufgrund der Verschiebungsinvarianz von \mathcal{Z} äquivalent zu:
2. Für alle $p \in \mathcal{H}$ mit $p \neq o$ existieren höchstens endlich viele Punkte q mit $\mathcal{Z}(o, q, p)$. Es genügt zu zeigen:
3. Für alle $p \in \mathcal{H}$ mit $p \neq o$ existiert eine Konstante $c(p) > 0$ die nur von p abhängt, so daß für jedes natürliche i gilt: Ist $p \in \mathcal{H}_i$, so folgt

$$|\{r \in \mathcal{H} : \mathcal{Z}(o, r, p)\}| \leq c(p).$$

Wir zeigen: Aus 3 folgt 2. Es gelte 3 und wir nehmen an, es existieren unendlich viele $r \in \mathcal{H}$ mit $\mathcal{Z}(o, r, p)$. Dann kann man eine endliche Menge $D \subset \{r \in \mathcal{H} : \mathcal{Z}(0, r, p)\}$ wählen mit $|D| > c(p)$. Nach der Konstruktion von \mathcal{H} existiert ein $i \in \mathbb{N}$ mit $D \subset \mathcal{H}_i$. Dies widerspricht aber der Annahme, daß $c(p)$ eine obere Schranke für die Anzahl der Punkte zwischen o und p ist.

Es ist noch eine weitere Vereinfachung möglich:

4. Für zwei teilerfremde ganze Zahlen x und y existiert eine Konstante $c > 0$, so daß für alle natürlichen Zahlen k gilt:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} := \varphi^{-k} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ und } \text{ggT}(x', y') = 1.$$

Dabei bezeichnet ggT den größten gemeinsamen Teiler.

Aus 4 folgt 3: Für ein beliebigen Punkt $p \in \mathcal{H} \setminus \{O\}$ existiert ein $j \in \mathbb{N}$ so daß p in \mathcal{H}_j liegt. Wir bezeichnen die Koordinaten von p bezüglich $G(o, \sigma_k, \tau_k)$ mit $x_k(p)$ bzw. $y_k(p)$, für $k > j$. Nach Konstruktion von \mathcal{H}_i , $i > j$, gilt:

$$\begin{pmatrix} x_i(p) \\ y_i(p) \end{pmatrix} := (\varphi^{-1})^{i-j} \begin{pmatrix} x_j(p) \\ y_j(p) \end{pmatrix}$$

Weiterhin ist offensichtlich $|\{r \in \mathcal{H}_i : \mathcal{Z}(o, r, p)\}| = \text{ggT}(x_i(p), y_i(p)) - 1$ richtig. Aus der Linearität von φ und φ^{-1} folgt, daß eine nicht von i abhängige Konstante c existiert mit $\text{ggT}(x_i(p), y_i(p)) < c$.

Es bleibt nun 4. zu beweisen. Zuerst stellen wir φ^{-k} folgendermaßen dar:

$$\varphi^{-k} = \begin{pmatrix} x_k & y_k \\ -y_k & x_k \end{pmatrix}$$

Für alle natürlichen Zahlen k gilt die Aussage, daß $\text{ggT}(x_k, y_k) = 1$. Dies sieht man induktiv wie folgt: Im Fall $k = 1$ folgt aus der Definition von φ daß x und y teilerfremd sind. Für $k > 0$ gilt

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k x - y_k y \\ y_{k+1} &= x_k y + y_k x. \end{aligned}$$

Ein gemeinsamer Teiler d von x_{k+1} und y_{k+1} teilt auch die jeweiligen Summanden und kann demnach nicht von 1 verschieden sein.

Um die Existenz einer Konstante $c > 0$ zu beweisen, für die die Ungleichung $\text{ggT}(x', y') < c$ gilt, und die

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \varphi^{-k} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

erfüllt, multiplizieren wir diese Gleichung mit

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ -y & x \end{pmatrix},$$

wobei a und b so gewählt sind, daß $ax + by = 1$, was aufgrund der Teilerfremdheit von x und y möglich ist. T ist offenbar ein Automorphismus, der die Zwischenrelation invariant läßt, da $\det T = 1$. Mit der Definition

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} := T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

ist also $\text{ggT}(x'', y'') = \text{ggT}(x', y')$. Durch Ausrechnen der Gleichung

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k & y_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

erhält man

$$\begin{aligned} x'' &= x_k + y_k(ay - bx) \\ y'' &= -(x^2 + y^2)y_k. \end{aligned}$$

Damit gilt für einen gemeinsamen Teiler d von x'' und y'' , daß sich dieser als Teiler von y'' darstellen lassen muß als $d = d' \cdot d''$, wobei d' den Term $(x^2 + y^2)$ und d'' die Zahl y_k teilt. d'' teilt auch x'' und damit $x_k = x'' - (ay - bx)y_k$, woraus sich der Wert von d'' wegen der Teilerfremdheit von x_k und y_k zu 1 bestimmt. Es ist also $d = d'$ und somit Teiler von $(x^2 + y^2)$. Es gilt:

$$\text{ggT}(x'', y'') = \text{ggT}(x', y') < (x^2 - y^2) - 1 =: c(x, y).$$

Damit ist 4 bewiesen und Axiom 6 gilt. □

Im weiteren werden wir sehen, daß \mathcal{H} eine Menge ist, die zwar planar ist, aber für deren parallele Geraden und ihre Zwischenrelation keine zu Axiom 6 analoge Aussage gilt: Wir können unendlich viele parallele Geraden zwischen zwei Parallelen finden.

Behauptung 2.7.3 *Es gilt:*

1. \mathcal{H} ist planare Menge.
2. \mathcal{H} liegt dicht in \mathbb{R}^2

Beweis. 1. Offensichtlich enthält \mathcal{H} Punkttripel, die nicht kollinear sind. Wir wählen paarweise verschiedene Punkte p, q, r, s in \mathcal{H} und definieren paarweise verschiedene Geraden g_1, g_2, g_3 mit $g_1 := g(p, q)$, $g_2 \parallel g_1$ mit $r \in g_2$, $g_3 \parallel g_1$ mit $s \in g_3$. Da nach Konstruktion von \mathcal{H} und Axiom 6 eine Gerade nach endlich vielen Schritten erzeugt ist, existiert ein $i \in \mathbb{N}$, so daß g_1, g_2, g_3 in \mathcal{G}_i liegen und damit Teilmengen von \mathcal{H}_i sind. Es gelte o.B.d.A die Zwischenrelation $\mathcal{Z}(g_1, g_2, g_3)$ in \mathcal{H}_i . Es muß demnach ein $\tau \in \mathcal{T}_i$ und $k, l > 0$ geben, so daß $\tau^k(g_1) = g_2$ und $\tau^l(g_2) = g_3$ in \mathcal{H}_i erfüllt sind. Die mit τ korrespondierende Verschiebung τ' aus $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$ induziert eine Verschiebung $\tau'' = \mathcal{H}^2 \cap \tau'$ in \mathcal{H} . Somit ist $\tau \subset \tau''$ und $\tau'' \in \mathcal{T}$. Weiter gilt $\tau''^k(g_1) = g_2$ und $\tau''^l(g_2) = g_3$. Die Menge \mathcal{H} genügt also der Planaritätsforderung.

2. Es seien $p \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Punkt und $\varepsilon > 0$. Wir wählen ein $k \in \mathbb{N}$ so, daß $d^k \cdot \varepsilon > 1$, wobei d der Kontraktionsfaktor aus der Definition von φ ist. Weiterhin definieren wir $p' := \varphi^{-k}(p)$. Zu diesem p' wird ein $q' \in \mathbb{Z}^2$ gewählt, dessen euklidischer Abstand von p' kleiner oder gleich als 1 ist. Dann liegt der Punkt $q := \varphi^k(q')$ in der ε -Umgebung von p . \mathcal{H} liegt also dicht in \mathbb{R}^2 . \square

Behauptung 2.7.4 *In \mathcal{H} gilt: Für zwei verschiedene parallele Geraden g_1 und g_2 in \mathcal{G} existieren unendlich viele $g \in \mathcal{G}$ mit $\mathcal{Z}(g_1, g, g_2)$.*

Beweis. Es seien g_1 und g_2 zwei solche Geraden, die beliebig gewählt sind. Es genügt zu zeigen, daß eine Gerade g existiert, die $\mathcal{Z}(g_1, g, g_2)$ erfüllt. Zu $g_i \in \mathcal{G}$ existiert $g'_i \in \mathcal{G}_{\mathbb{R}^2}$ mit $g_i \subset g'_i$ für $i = 1, 2$. Da \mathcal{H} dicht in \mathbb{R}^2 liegt, existiert ein Punkt $p \in \mathcal{H}$ der zwischen den beiden reellen Geraden liegt. Nun seien $q, r \in g_1$ beliebig aber verschieden und $s \in g_2$. Damit sind p, q, r, s paarweise verschiedene Punkte aus \mathcal{H} und weil \mathcal{H} der Planaritätsforderung genügt, liegen die Geraden $g_1 = g(q, r)$, $g_2 \parallel g_1$ mit $s \in g_2$ und $g \parallel g_1$ mit $p \in g$ in Zwischenrelation. Da für die entsprechenden reellen Geraden gilt $\mathcal{Z}(g_1, g, g_2)$ (wegen $p \in g'$), gilt auch $\mathcal{Z}(g_1, g, g_2)$. Also ist die Behauptung bewiesen. \square

Mit dieser Erkenntnis bekommt man auch einen anderen Blick auf offene und abgeschlossene Halbebenen. Diese beiden Begriffe unterscheiden sich in dem vorliegenden Fall. Auch die Begriffe der D-Konvexität und der strengen Konvexität unterscheiden sich in planaren Mengen, wie \mathcal{H} .

Behauptung 2.7.5 *Es existieren Mengen, die D-konvex aber nicht streng konvex sind.*

Beweis. $H = H^+(g, p)$ sei eine Halbebene, in der zwischen g und jeder zu g parallelen Geraden g' unendlich viele Geraden liegen und q, r seien zwei Punkte aus g . Wir definieren $g_1 := g(p, q)$ und $g_2 := g(r, p)$ und wählen $t \in qr$ mit $t \neq q$. Dann ist die Menge

$$M := (H \cap H^+(g_1, r) \cap H^+(g_2, q)) \setminus qt$$

D-konvex, aber nicht streng konvex. □

Alle Geometrien, die diese pathologischen Eigenarten besitzen lassen sich aufgrund der folgenden drei Eigenschaften der Abbildung φ charakterisieren:

1. φ muß eine Rotation um ein irrationales Vielfaches von π enthalten. Das ist notwendig um abzählbar unendliche Orbits für die Punkte der Geometrie unter φ zu erzeugen.
2. $\varphi^{-1}(\mathbb{Z}^2) \subset \mathbb{Z}^2$ wird im Beweis der Aussage 1 der Behauptung 2.7.1 genutzt um $\mathcal{H}_i \subset \mathcal{H}_{i+1}$ zu zeigen. Diese Forderung impliziert insbesondere, daß ganzzahlige Vielfache der Transformationen σ_i und τ_i als Summe der Transformationen σ_0 und τ_0 darstellbar sind. Diese Eigenschaft ist wesentlich, um die Planaritätsbedingung für \mathcal{H} beweisen zu können. Gilt diese Bedingung nicht so kann ein σ_i bzw. τ_i gefunden werden, welches aus der planaren Menge herausführt in eine Art dreidimensionale Geometrie, für die die Planaritätsbedingung nicht mehr gelten kann. Dieser Zusammenhang wird im Abschnitt 3 weiter untersucht.
3. Im weiteren muß φ eine Kontraktion um Faktor d enthalten. Dabei ist die Rationalität von d wesentlich, da sonst Punkt 2 widersprochen wird. Allerdings ist diese Eigenschaft schwächer als die anderen. Die Kontraktion wird benötigt für den Beweis der Dichtheit von \mathcal{H} in \mathbb{R}^2 .

2.8 Das zweite Diskretheitsaxiom

Die vorangegangenen Beobachtungen machen es nötig, ein neues Axiom einzuführen, um den Effekten zu entgehen, die eine Geometrie von der Art der Menge P mit sich bringt.

Axiom 8 (2. Diskretheitsaxiom) *Zu je zwei voneinander verschiedenen parallelen Geraden g_1, g_2 gibt es höchstens endlich viele Geraden g , derselben Richtung, für die $\mathcal{Z}(g_1, g, g_2)$ gilt.*

Satz 2.8.1 1. Jedes planare Gitter genügt dem Axiom 8.

2. Jede Ebene ist ein planares Gitter.

Beweis. 1. Nach Folgerung 2.5.1 kann zu jeder Geraden g eine Gerade g' gefunden werden, so daß g und g' Achsenpaar eines planaren Gitters sind. Man kann also durch Verschiebung von g längs g' das planare Gitter erzeugen. Damit folgt das zweite Diskretheitsaxiom aus dem ersten.

2. Es sei E eine Ebene einer diskreten Geometrie \mathcal{P} und $g \in \mathcal{G}_{|E}$ eine beliebige Gerade in E . Nach Satz 2.6.1 genügt E mit den kanonischen Einschränkungen $\mathcal{G}_{|E}$ und $\mathcal{T}_{|E}$ den Axiomen 1 bis 7. Offenbar gilt $E = \bigcup \{g' \in \mathcal{G}_E : g' \parallel g\}$. Wir wählen nun eine Gerade g' in E , die parallel zu g ist. Nach Axiom 8 existiert ein $k \in \mathbb{N}$ und $g_i \in \mathcal{G}_{|E}$ mit $\mathcal{Z}(g, g_i, g')$ für $i = 1, \dots, k$. g_1, \dots, g_k können so geordnet werden, daß $\mathcal{Z}(g_{i-1}, g_i, g_{i+1})$ gilt. Es sei $\tau \in \mathcal{T}_{|E}$ eine Verschiebung mit $\tau(g_i) = g_{i+1}$. $g_j = j\tau(g)$ für $j \in \mathbb{Z}$. Damit läßt sich E darstellen als $\bigcup \{g_j : j \in \mathbb{Z}\}$. Andernfalls gäbe es einen Punkt $p \in E$, der auf keiner dieser Geraden liegt und durch den nach Axiom 3 eine Gerade \hat{g} verläuft, die zu g parallel ist. Es gilt für ein $j \in \mathbb{Z}$ die Beziehung $\mathcal{Z}(g_j, \hat{g}, g_{j+1})$ wegen der Planarität von E und dem ersten Diskretheitsaxiom. Dann liegt aber zwischen jedem g_i und g_{i+1} , $i \in \mathbb{Z}$ eine weitere Gerade, insbesondere zwischen g_0 und g_1 . Die widerspricht der Voraussetzung. Damit ist (q, τ, σ) ein Koordinatensystem für E , wobei σ Generator von g ist. E ist also gleich dem planaren Gitter $G(q, \tau, \sigma)$. \square

Definition 2.8.1 Es sei E eine Ebene. Wir nennen eine Menge $M \subset E$ **beschränkt**, wenn drei Punkte p, q, r in E existieren, so daß gilt:

$$M \subset H^+(g(p, q), r) \cap H^+(g(p, r), q) \cap H^+(g(q, r), p).$$

Die nachstehende Folgerung ist nun leicht einzusehen und zieht als Konsequenz die Isomorphie (im Sinne der planaren Gitter) aller Ebenen nach sich. Damit macht es Sinn, wenn wir von *der* diskreten Ebene sprechen.

Folgerung 2.8.1 Für eine Ebene E gelten folgende Aussagen

1. Jede beschränkte Teilmenge von E ist endlich.
2. Eine beschränkte Teilmenge M von E ist genau dann streng konvex, wenn M D -konvex ist.

3. Jede offene Halbebene von E kann auch als abgeschlossene Halbebene aufgefaßt werden und umgekehrt. Es gilt für Geraden g, g' mit $g' \in H^+(g, p)$, $g' \neq g$ und der Eigenschaft, daß zwischen g und g' keine weitere Geraden liegen:

$$H^+(g', p) = h^+(g, p) \text{ und } H^-(g, p) = h^-(g', p).$$

□

Kapitel 3

Der allgemeine Fall

Dieser Teil befasst sich mit der Verallgemeinerung der Konzepte, die Hübler bei der Untersuchung seines Axiomensystems angewandt hat. Die Begriffe der Planarität und Ebene werden in einen allgemeinen Kontext gesetzt und somit Geometrien erklärt, deren Rang größer als zwei ist.

3.1 Diskrete Gitter höheren Ranges

Der folgende Abschnitt stützt sich nicht auf die Kenntnis des Axioms 8. Es wäre für unsere Zwecke zu eingeschränkt und nicht dienlich. Ziel ist es eine allgemeine Fassung dieses Axioms zu entwickeln, wofür zuerst der begriffliche Apparat erweitert und verallgemeinert wird. Den Anfang macht der Begriff des Gitters vom Rang n . Eine Menge $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ heißt **abhängig**, wenn ganze Zahlen i_1, \dots, i_n existieren, die nicht gleichzeitig 0 sind, so daß $\prod_{j=1}^n \tau_j^{i_j} = \text{Id}$. Ist dies nicht der Fall so heißt die Menge **unabhängig**¹.

Definition 3.1.1 *Es sei p ein Punkt und $\{\tau_1, \dots, \tau_n\} \subset \mathcal{T}$ unabhängig. Dann ist das von p und τ_1, \dots, τ_n aufgespannte **Gitter vom Rang n** die Menge*

$$G^n(p, \tau_1, \dots, \tau_n) = \{q \in \mathcal{P} : q = (\prod_{j=1}^n \tau_j^{i_j})(p), i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}\}$$

Die τ_i heißen Generatoren des Gitters.

*Das Gitter heißt **vollständig**, wenn die Generatoren des Gitters einfach sind.*

¹Wir schreiben an dieser Stelle $\prod_{j=1}^n \tau_j^{i_j}$ anstatt $\bigcirc_{j=1}^n \tau_j^{i_j}$ oder $\tau_1^{i_1} \circ \dots \circ \tau_n^{i_n}$.

Gitter vom Rang n sind eine natürliche Verallgemeinerung von planaren Gittern, somit ist es nicht weiter verwunderlich, daß auch diese invariant bleiben unter der Wahl eines Basispunktes p aus $G^n(p, \tau_1, \dots, \tau_n)$. Das nächste Lemma macht davon Gebrauch:

Lemma 3.1.1 *Es seien $p_1, p_2, p_3 \in G^n(p, \tau_1, \dots, \tau_n)$, $g_1 := g(p_1, p_2)$, $g_2 \parallel g_1$ mit $p_2 \in g_2$. Dann existiert ein Punkt $p_4 \in G^n(p, \tau_1, \dots, \tau_n)$ mit $g_2 = g(p_3, p_4)$.*

Beweis. Da p_1 ein Punkt in $G = G^n(p, \tau_1, \dots, \tau_n)$ ist, läßt sich G auch als $G^n(p_1, \tau_1, \dots, \tau_n)$ schreiben. Der Punkt p_2 liegt in G also existieren ganze Zahlen i_1, \dots, i_n mit $p_2 = \tau_1^{i_1} \circ \dots \circ \tau_n^{i_n}(p_1)$. Der Punkt p_3 liegt auch in G , man kann also p_4 als $\tau_1^{i_1} \circ \dots \circ \tau_n^{i_n}(p_3)$ definieren und erhält somit einen weiteren Punkt aus G . Die Gerade $g(p_3, p_4)$ ist offensichtlich parallel zu g_1 . \square

Lemma 3.1.2 *Es seien G_1, G_2, G_3 paarweise verschiedene parallele Gitter vom Rang n und g, g' Geraden, die alle drei Gitter schneiden.*

Betrachten wir nun eine Menge von Punkten $M = \{p_1, \dots, p_{n+1}\}$. Dann lassen sich die Generatoren τ_i der Geraden $g_j = g(p_1, p_{j+1})$ für $i = 1, \dots, n$ bestimmen. Wir nennen M **abhängig**, wenn $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ abhängig ist. Andernfalls heißt M **unabhängig**. Das heißt insbesondere, daß \emptyset und einelementige Mengen unabhängig sind.

Definition 3.1.2 *Es sei $M = \{p_1, \dots, p_{n+1}\}$ eine unabhängige Menge. Dann ist das von M erzeugte Gitter*

$$G^n(p_1, \dots, p_n) = G^n(M) := G^n(p_1, \tau_1, \dots, \tau_n).$$

Dabei sind τ_1, \dots, τ_n wie oben beschrieben bestimmt.

Diese Definition erzeugt vollständige Gitter. Wir bemerken weiterhin, daß Geraden auch als Gitter vom Rang 1 und planare Gitter als Gitter von Rang 2 aufgefaßt werden können.

Folgerung 3.1.1 *Es sei die Teilmenge $\{p_1, \dots, p_{k+1}\}$ des n -Gitters $G = G^n(p, \tau_1, \dots, \tau_n)$ eine unabhängige Menge und weiterhin $1 < k < n$. $G_1 := G^{(k-1)}(p_1, \dots, p_k)$ und $G_2 \parallel G_1$ mit $p_{k+1} \in G_2$. Dann existieren Punkte $p'_1, \dots, p'_k \in G$ mit*

$$G_2 = G^{(k-1)}(p'_1, \dots, p'_k, p_{k+1}).$$

Beweis. Analog Lemma 3.1.1 □

Satz 3.1.1 Für eine unabhängige Menge $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ von Translationen, den Punkt p und ein Gitter $G = G^m(p, \tau_1, \dots, \tau_n)$ genügt $(G, \mathcal{G}|_G, \mathcal{T}|_G)$ den Axiomen 1 bis 7. □

Definition 3.1.3 Es seien $G_1 = G^m(p, \tau_1, \dots, \tau_n)$ und $G_2 = G^m(q, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ zwei Gitter des Ranges n . Sie heißen *parallel*, wenn eine von der Identität verschiedene Translation τ existiert mit $\tau(G_1) = G_2$.

Definition 3.1.4 Es seien G_1, G_2, G_3 drei verschiedene parallele Gitter vom Rang n . Es gilt $\mathcal{Z}(G_1, G_2, G_3)$ genau dann, wenn eine Verschiebung τ und natürliche Zahlen i, j existieren mit $\tau^i(G_1) = G_2$ und $\tau^j(G_2) = G_3$

Lemma 3.1.3 Für drei paarweise verschiedene parallele Gitter G_1, G_2, G_3 des Ranges n mit der Eigenschaft $\mathcal{Z}(G_1, G_2, G_3)$, können nicht gleichzeitig die Beziehungen $\mathcal{Z}(G_1, G_3, G_2)$ und $\mathcal{Z}(G_2, G_1, G_3)$ gelten.

Beweis. Angenommen, es gelten $\mathcal{Z}(G_1, G_2, G_3)$ und $\mathcal{Z}(G_1, G_3, G_2)$. Dann existieren zwei Translationen τ und σ , sowie natürliche Zahlen i, j, k, l , für die $\tau^i(G_1) = G_2$, $\tau^j(G_2) = G_3$ sowie $\sigma^k(G_1) = G_3$, $\sigma^l(G_3) = G_2$ gelten. Es sei p_1 ein Punkt von G_1 . Die Punkte $p_1, p_2 := \tau^i(p_1), p_3 := \tau^j(p_2)$ und $p_1, p'_3 := \sigma^k(p_1), p'_2 := \sigma^l(p'_3)$ sind jeweils kollinear. Mit Axiom 7 und Folgerung 2.3.5 folgt nun aber der Widerspruch $\mathcal{Z}(p_1, p_2, p_3) \Leftrightarrow \mathcal{Z}(p_1, p'_3, p'_2)$, da $p_2, p'_2 \in G_2$ und $p'_3, p_3 \in G_3$. □

Lemma 3.1.4 Es seien G_1, \dots, G_4 paarweise verschiedene parallele Gitter vom Rang n . Dann folgen aus $\mathcal{Z}(G_1, G_2, G_3)$ und $\mathcal{Z}(G_2, G_3, G_4)$ auch die Beziehungen $\mathcal{Z}(G_1, G_2, G_4)$ und $\mathcal{Z}(G_1, G_3, G_4)$.

Beweis. Es gelten also die Beziehungen $\mathcal{Z}(G_1, G_2, G_3)$ und $\mathcal{Z}(G_2, G_3, G_4)$. Dann existieren natürliche Zahlen i, j, k, l und Verschiebungen τ und σ mit $\tau^i(G_1) = G_2$, $\tau^j(G_2) = G_3$ und $\sigma^k(G_2) = G_3$, $\sigma^l(G_3) = G_4$. Wir müssen zwei Fälle unterscheiden: 1. Fall: τ und σ erzeugen die gleiche Richtung. Dann existiert eine Gerade g , die G_1 in p trifft und $g = \tau(g) = \sigma(g)$. Die Gerade g hat dann auch Punkte mit G_2, G_3 und G_4 gemein. Die Behauptung folgt nun aus der Zwischenrelation auf Geraden. 2. Fall: τ und σ erzeugen

verschiedene Richtungen. Wir wählen einen beliebigen Punkt aus G_2 . Es ist nun zu zeigen, daß G_1, \dots, G_4 mit $G = G(p, \sigma, \tau)$ gemeinsam haben. Das ist offensichtlich für G_3 , denn $p_1 := \tau^j(p)$ und $p_2 := \sigma^k(p)$ liegen beide in G_3 . Die Punkte $p_3 := \tau^{-i}(p)$ und $p_4 := \sigma^{(k+l)}(p)$ liegen in G_1 bzw. in G_4 . Nach Lemma 3.1.1 existieren Punkte p', p'_3, p'_4 mit $g_1 := g(p_3, p'_3)$, $g_2 := g(p, p')$ und $g_4 := g(p_4, p'_4)$, die allesamt parallel zu $g_3 = g(p_1, p_2)$ sind. Es sei $g'_1 = g_1 \cap G$ und τ' der Generator von g' in G . Nach Lemma 2.5.2 existiert ein σ' , so daß G gleich $G(p, \tau', \sigma')$ ist. Die Gerade $h = \{\sigma'^i(p) : i \in \mathbb{Z}\}$ schneidet g_1, \dots, g_4 und damit G_1, \dots, G_4 und wie im ersten Fall folgt die Behauptung mit Hilfe der Zwischenrelation auf Geraden und der freien Wahl von p . \square

Folgerung 3.1.2 *Für endlich viele Gitter vom Rang n G_1, \dots, G_m , die paarweise verschieden und parallel sind und von denen sich je drei in Zwischenrelation befinden, existiert ein $\tau \in \mathcal{T}$ und ganze Zahlen i_1, \dots, i_{m-1} , so daß $G_{i_j+1} = \tau^{i_j}(G_j)$ für $j = 1, \dots, m-1$.* \square

3.2 Der Rang einer Menge

Die Erfahrung aus Abschnitt 2.7 hat uns gezeigt, daß die, wie auch immer gearteten, Gitter noch lange nicht alle Modelle für die Axiome 1 bis 7 sind. Deshalb soll nun der Begriff der Planarität in einen allgemeinen Rahmen gesetzt werden.

Definition 3.2.1 *Eine Menge $M \subset \mathcal{P}$ heißt vom **Rang** n , in Zeichen $r(M) = n$, wenn M $(n+1)$ -elementige unabhängige Teilmengen enthält und wenn für eine unabhängige Punktmenge $\{p_1, \dots, p_n\} \subset M$ und beliebige Punkte $p_{n+1}, p_{n+2} \in M$ die **Rang- n -Forderung** gilt:*

Die Gitter vom Rang $(n-1)$ G_1, G_2, G_3 mit $G_1 := G^{(n-1)}(p_1, \dots, p_n)$, $G_2 \parallel G_1, p_{n+1} \in G_2$ und $G_3 \parallel G_1, p_{n+2} \in G_3$ befinden sich in Zwischenrelation, wenn sie paarweise verschieden sind.

Die leere Menge habe den Rang -1.

Die planaren Mengen sind gerade die Mengen vom Rang 2.

Lemma 3.2.1 *Für ein \mathcal{P} von endlichem Rang existiert keine Menge $M \subset \mathcal{P}$ für die $r(M)$ nicht definiert ist.*

Beweis. Die Menge \mathcal{P} habe den Rang n und wir nehmen an, es gibt ein $M \subset \mathcal{P}$ für das $r(M)$ nicht definiert ist. In M können Punkte p_0, \dots, p_k gefunden werden, die unabhängig sind. Da $r(M)$ undefiniert ist, erfüllt M die Rang- n -Forderung nicht. Es existiert also ein Punkt p_{k+1} in M , so daß die Gitter $G_1 = G^{(k-1)}(p_0, \dots, p_{k-1})$, $G_2 \parallel G_1$, $p_k \in G_2$ und $G_3 \parallel G_1$, $p_{k+1} \in G_3$ nicht in Zwischenrelation liegen. Daraus folgt die Unabhängigkeit der Menge $\{p_0, \dots, p_{k+1}\}$, denn andernfalls wären die Gitter G_1, G_2, G_3 nicht verschieden und M erfüllte die Forderung.

Dieses Argument kann für alle $k < n$ wiederholt werden. Wir können also folgern, daß in M die Menge $\{p_0, \dots, p_n\}$ unabhängig ist. Die Gitter $G'_1 := G^{(n-1)}(p_0, \dots, p_{n-1})$, $G'_2 \parallel G'_1$ mit $p_n \in G'_2$ und $G'_3 \parallel G'_1$ mit $q \in G'_3$ für ein beliebiges $q \in M$ sind dann verschieden und liegen nicht in Zwischenrelation. Da M Teilmenge von \mathcal{P} ist und G'_1, G'_2, G'_3 aufgrund $r(\mathcal{P}) = n$ in Zwischenrelation liegen ergibt sich ein Widerspruch. \square

Dieser Zusammenhang kann auch algebraisch erklärt werden: Der Unabhängigkeitsbegriff für Punktmengen ist mit Hilfe von Translationen definiert worden. Wir haben schon erkannt, daß die Translationsmenge eine abelsche Gruppe und somit ein \mathbb{Z} -Modul ist. Dieser ist sogar frei, da in \mathcal{T} keine Elemente endlicher Ordnung existieren. Die Theorie kommutativer Ringe lehrt nun, daß jeder freie Modul über einem Integritätsring eine Basis besitzt und daß verschiedenen Basen eines solchen Moduls äquikardinal sind. Weiterhin haben alle unabhängigen Teilmengen solcher Moduln eine Kardinalität, die die einer Basis nicht übersteigt. Die Kardinalität einer maximalen unabhängigen Menge von Translationen einer Teilmenge M des Moduls ist dann eindeutig bestimmt und entspricht dem Rang von M .

Wir können nun folgende fundamentale Lemmata über die Rangfunktion behandeln.

Lemma 3.2.2 *Es gilt:*

1. $M \subset \mathcal{P} : -1 \leq r(M) \leq |M| - 1$
2. $M \subset N \subset \mathcal{P} : r(M) \leq r(N)$

Beweis. Die erste Behauptung folgt sofort aus der Definition des Ranges und die zweite folgt aus dem Beweis von Lemma 3.2.1. \square

Lemma 3.2.3 *Eine Rang- n Menge kann nicht vom Rang k sein für $-1 \leq k < n$.*

Beweis. Die Fälle $k = -1, 0, 1$ sind trivial. Es sei also M eine Menge, $r(M) = n$ und $k < n$. Weil in M $n + 1$ unabhängige Punkte existieren, kann man in M auch $k + 1$ unabhängige Punkte finden. Wir müssen also zeigen, daß M die Rang- k -Forderung nicht erfüllt. Dazu wählen wir aus der Menge der n Verschiebungen τ_i , die p_1 auf p_{i+1} abbilden und offensichtlich unabhängig sind, $k + 1$ aus. Diese seien o.B.d.A. $\tau_1, \dots, \tau_{k+1}$. Nun werden die Gitter $G_1 := G^{(k-1)}(p_1, \tau_1, \dots, \tau_{k-1})$, $G_2 := \tau_k(G_1)$ und $G_3 := \tau_{k+1}(G_1)$ definiert. Aufgrund der Unabhängigkeit der Verschiebungen können diese aber nicht in Zwischenrelation liegen. \square

Folgerung 3.2.1 Für Mengen $A \subset M \subset R$ gilt: Ist A eine maximale unabhängige Menge so ist $r(A) = r(M) = |A| - 1$. \square

Lemma 3.2.4 Für beliebige Teilmengen M und N von \mathcal{P} gilt

$$r(M \cup N) + r(M \cap N) \leq r(M) + r(N).$$

Beweis. Es seien $A_{M \cap N} \subset M \cap N$ und $A_{M \cup N} \subset M \cup N$ maximale unabhängige Teilmengen. Wir können annehmen, daß $A_{M \cap N} \subset A_{M \cup N}$ gilt. Weiterhin sind $A_{M \cup N} \cap M$ und $A_{M \cup N} \cap N$ unabhängige Teilmengen von M bzw. N . Wir wissen nun $|A_{M \cup N} \cap M| - 1 \leq r(M)$ und $|A_{M \cup N} \cap N| - 1 \leq r(N)$. Faßt man diese Beobachtungen zusammen, erhält man:

$$\begin{aligned} r(M) + r(N) &\geq |A_{M \cup N} \cap M| - 1 + |A_{M \cup N} \cap N| - 1 \\ &= |(A_{M \cup N} \cap M) \cup (A_{M \cup N} \cap N)| \\ &\quad + |(A_{M \cup N} \cap M) \cap (A_{M \cup N} \cap N)| - 2 \\ &= |A_{M \cup N} \cap (M \cup N)| + |A_{M \cup N} \cap (M \cap N)| - 2 \\ &= |A_{M \cup N}| - 1 + |A_{M \cap N}| - 1 \\ &= r(M \cup N) + r(M \cap N) \end{aligned}$$

\square

Lemma 3.2.5 Es seien $M, N \subset \mathcal{P}$ mit der Eigenschaft, daß für alle $q \in N \setminus M$ die Aussage $r(M \cup \{p\}) = r(M)$ wahr ist. Dann gilt $r(M \cup N) = r(M)$.

Beweis. Es sei $N \setminus M = \{q_1, \dots, q_n\}$. Die Behauptung folgt aus Induktion nach n . Für $n = 1$ folgt das Ergebnis aus der Voraussetzung. Es sei also $n > 1$. Nach der Induktionsvoraussetzung und Lemma 3.2.4 gilt:

$$\begin{aligned}
r(M) + r(M) &= r(M \cup \{q_1, \dots, q_n\}) + r(M \cup \{q_{n+1}\}) \\
&\geq r((M \cup \{q_1, \dots, q_n\}) \cup (M \cup \{q_{n+1}\})) \\
&\quad + r((M \cup \{q_1, \dots, q_n\}) \cap (M \cup \{q_{n+1}\})) \\
&= r(M \cup \{q_1, \dots, q_n, q_{n+1}\}) + r(M) \\
&\geq r(M) + r(M)
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt nutzt Lemma 3.2.2.2. Es gilt also in jedem Schritt die Gleichheit von $r(M)$ und $r(M \cup \{q_1, \dots, q_n, q_{n+1}\})$, womit der Beweis vollständig ist. \square

Lemma 3.2.6 Für $M \subset \mathcal{P}$ und $p \in \mathcal{P}$ gilt:

$$r(M) \leq r(M \cup \{p\}) \leq r(M) + 1$$

Beweis. Es sei A eine maximale unabhängige Menge in M . Dann ist entweder A oder $A \cup \{p\}$ maximale unabhängige Menge von $M \cup \{p\}$ und damit ist $r(M \cup \{p\})$ entweder $r(M)$ oder $r(M) + 1$. \square

Lemma 3.2.7 Jedes Gitter vom Rang n ist eine Menge vom Rang n .

Beweis. Es sei G definiert als $G^n(p, \tau_1, \dots, \tau_n)$. Dann enthält G die Menge $\{p, \tau_1(p), \dots, \tau_n(p)\}$, die offenbar unabhängig ist. Die Rang- n -Forderung läßt sich analog zum Lemma 3.1.4 beweisen. \square

3.3 Ebenen

Definition 3.3.1 Eine maximale Punktmenge vom Rang n , $E \subset \mathcal{P}$, heißt **n -Ebene**. Das heißt, für alle $p \in \mathcal{P} \setminus E$ gilt $n = r(E) < r(E \cup \{p\})$.

Folgerung 3.3.1 1. Zu jeder Rang- n Menge M existiert genau eine n -Ebene E mit $M \subset E$.

2. Für jede k -elementige unabhängige Teilmenge M einer n -Ebene E mit $k \leq n + 1$, gilt $G^{(k-1)}(M) \subset E$.
3. Es seien E_1 eine n -Ebene, E_2 eine m -Ebene und $A = \{p_0, \dots, p_k\}$ eine unabhängige Teilmenge von $E_1 \cap E_2$. Dann ist $G^k(A) \subset E_1 \cap E_2$.

Beweis. 1. Wir zeigen für eine Rang- n Menge und eine unabhängige Menge $\{p_1, \dots, p_{n+1}\} \subset M$: Wenn die Menge $\{p, p_1, \dots, p_{n+1}\}$ vom Rang n ist, $p \in \mathcal{P}$ beliebig, dann ist $M \cup \{p\}$ auch vom Rang n . Ist der Punkt p Element von M so ist nichts mehr zu zeigen, wir können also p aus $\mathcal{P} \subset M$ wählen. Angenommen, die Menge $\{p, p_1, \dots, p_{n+1}\}$ ist vom Rang n . Es genügt nun zu zeigen, daß für beliebige paarweise verschiedene Punkte $q_1, \dots, q_{n+1} \in M$ die Menge $\{q_1, \dots, q_{n+1}, p\}$ die Rang- n -Forderung erfüllt. Wir definieren nun folgende Gitter:

$$\begin{array}{ll}
G_1 & := (n-1)G(p_1, \dots, p_n) \\
G_2 & \parallel G_1 \text{ und } p_{n+1} \in G_2 \\
G & \parallel G_1 \text{ und } p \in G \\
G_3 & \parallel G_1 \text{ und } q_1 \in G_3 \\
& \vdots \\
G_{n+3} & \parallel G_1 \text{ und } q_{n+1} \in G_{n+3}
\end{array}$$

Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß diese paarweise verschieden sind. Da $\{p, p_1, \dots, p_{n+1}\}$ vom Rang n ist, befinden sich die Gitter G, G_1 und G_2 in Zwischenrelation und weil M Rang n hat, befinden sich auch die Gitter G_1, \dots, G_{n+3} in Zwischenrelation. Es existieren also nach Folgerung 3.1.2 ganze Zahlen i_1, \dots, i_{n+3} und eine Verschiebung τ mit $G_j = \tau^{i_j}(G)$ für $j = 1, \dots, n+3$. Es seien $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ die Generatoren von G . Da $G^n(p, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \tau)$ Rang n hat, erfüllt $\{q_1, \dots, q_{n+1}, p\}$ die Rang- n -Forderung. Wir definieren nun:

$$E(M) := M \cup \{p \in \mathcal{P} : r(\{p, p_1, \dots, p_{n+1}\}) = n\}.$$

Dann ist E offensichtlich eine eindeutig bestimmte maximale Menge des Ranges n , also eine n -Ebene, die M enthält.

2. Es seien E eine n -Ebene und $\{p_1, \dots, p_k\}$ eine unabhängige Teilmenge von E . Die Generatoren von $G^{(k-1)}(p_1, \dots, p_k)$ seien $\tau_1, \dots, \tau_{k-1}$. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über $m = (n+1) - k$. Für $m = 0$ ist $k = n+1$. G ist dann eine Rang- n Menge, die nach Teil 1 der Folgerung in einer n -Ebene E' liegen muß. Da E' eindeutig durch $\{p_1, \dots, p_{n+1}\}$ bestimmt ist, gilt

$E' = E$. Für $m > 0$ wählen wir aus $\mathcal{T}_{|E}$ ein σ mit $\sigma(p_1) \notin G$. Dann gilt:

$$G \subset G' := G^{(k+1)}(\tau_1, \dots, \tau_n, \sigma)$$

Nach Induktionsvoraussetzung liegt G' in E und die Behauptung ist bewiesen.

3. Zum Beweis der Inklusion sei die Menge $\{p_1, \dots, p_k\}$ unabhängig in $E_1 \cap E_2$. Nach Teil 2 folgt nun $G^{(k-1)}(p_1, \dots, p_k) \subset E_1 \cap E_2$. \square

Laut Teil 1 können wir die Ebenenbildung als durch einen Abschluß-Operator E realisiert vorstellen. Eine genauere Betrachtung von E erfolgt an einem späteren Punkt.

Daß die Inklusion in 3. nicht durch eine Gleichheit ersetzt werden kann, sieht man, indem man sich E_1 als die Menge $\mathcal{P} \times \mathbb{Z}$ und E_2 als $\mathcal{P} \times \{0\}$ vorstellt, wobei \mathcal{P} die Menge aus Abschnitt 2.7 bezeichnet. Dann ist jedes Gitter vom Rang 2 $G = G(p, \tau, \sigma)$ eine echte Teilmenge von $E_1 \cap E_2$

Analog zum Satz 2.6.1 führt man den Beweis der folgenden Aussage:

Satz 3.3.1 *Es sei E eine n -Ebene. Dann genügt das Tripel $(E, \mathcal{G}_{|E}, \mathcal{T}_{|E})$ den Axiomen 1 bis 7. Dabei seien die Ordnungsrelationen und die Parallelenrelation entsprechend eingeschränkt.* \square

Lemma 3.3.1 *Es gilt für eine beliebige Menge $M \subset \mathcal{P}$*

$$E(M) = \{p \in \mathcal{P} : r(M \cup \{p\}) = r(M)\}$$

Beweis. Es sei $\{p_1, \dots, p_{n+1}\} \subset M$ maximal unabhängig. Wir wissen:

$$E(M) = M \cup \{p \in \mathcal{P} : r(\{p, p_1, \dots, p_{n+1}\}) = n\}.$$

Analog zum Beweis der Folgerung 3.3.1.1 gilt für beliebiges $p \in \mathcal{P}$: Wenn $r\{p, p_1, \dots, p_{n+1}\} = n$ gilt, dann gilt auch $r(M \cup \{p\}) = n = r(M)$. Dies ist nach Voraussetzung für alle $p \in E(M)$ erfüllt. Die Behauptung ist also bewiesen. \square

Lemma 3.3.2 *Der Operator E hat die folgenden Eigenschaften:*

1. Für jedes $M \subset \mathcal{P}$ gilt $M \subset E(M)$.

2. Ist $M \subset N \subset \mathcal{P}$ so gilt $E(M) \subset E(N)$
3. Für $M \in \mathcal{P}$ ist $E(E(M)) = M(X)$
4. Es seien $M \subset \mathcal{P}$, $p \in M$ und $q \in E(M \cup \{p\}) \setminus E(M)$. Dann ist $p \in cl(M \cup \{q\})$.

Beweis. 1. sieht man sofort mit dem Beweis von Folgerung 3.3.1.1 ein.

Für die zweite Behauptung seien zwei Mengen M, N mit $M \subset N$ und $p \in E(M) \setminus M$ gegeben. Nach Lemma 3.3.1 ist dann $r(M \cup \{p\}) = r(M)$. Damit ist jede maximale unabhängige Teilmenge A von M auch maximal unabhängig in $M \cup \{p\}$. In $N \cup \{p\}$ existiert nun eine maximale unabhängige Teilmenge A' , die A , aber nicht p enthält. Deshalb ist A' auch Teilmenge von N . Es folgt $r(N \cup \{p\}) = |A'| - 1 = r(N)$ und damit $p \in E(N)$.

3. Aus Teil 1 folgt unmittelbar die Aussage $E(M) \subset E(E(M))$. Für den Beweis der anderen Richtung der Inklusion wählen wir ein $p \in E(E(M))$. Dann gilt nach Lemma 3.3.1

$$r(E(M) \cup \{p\}) = r(E(M)).$$

Aus dem gleichen Grund gilt für alle $q \in E(M) \setminus M$ die Beziehung

$$r(M \cup \{q\}) = r(M).$$

Lemma 3.2.5 liefert nun

$$r(M) = r(M \cup (E(M) \setminus M)) = r(E(M)),$$

woraus $r(E(M) \cup p) = r(M)$ folgt. Nach Lemma 3.2.2.2 gilt

$$r(E(M) \cup \{p\}) \geq r(M \cup \{p\}) \geq r(M).$$

Die Kombination beider Argumente zeigt die Gleichheit der letzten drei Werte. p ist also in $E(M)$ enthalten und somit gilt $E(E(M)) \subset E(M)$.

4. Es sei $q \in E(M \cup \{p\}) \setminus E(M)$. Dann ist $r(M \cup \{p\} \cup \{q\}) = r(M \cup \{p\})$ und $r(M \cup \{q\}) \neq r(M)$. Daraus und aus Lemma 3.2.6 folgern wir $r(M \cup \{p\}) = r(M) + 1$ und

$$r(M) + 1 = r(X \cup \{q\}) \leq r(M \cup \{q\} \cup \{p\}) = r(M \cup \{p\}) \leq r(M) + 1$$

Das heißt, $r(M \cup \{q\} \cup \{p\}) = r(M \cup \{q\})$, also $p \in E(M \cup \{q\})$. □

Lemma 3.3.3 *Es sei $M \subset \mathcal{P}$ und $p \in \mathcal{P}$. Wenn M unabhängig ist, $M \cup \{p\}$ aber nicht, so ist $p \in E(M)$.*

Beweis. Da $M \cup \{p\}$ nicht unabhängig ist, existiert ein Element $q \in M \cup \{p\}$ mit $q \in E((M \cup \{p\}) \setminus \{q\})$, denn $r(M \cup \{p\}) = r((M \cup \{p\}) \setminus \{q\})$. Ist $q = p$, so gilt das Lemma. Wenn hingegen $q \neq p$, so ist $(M \cup \{p\}) \setminus \{q\} = (M \setminus \{q\}) \cup \{p\}$ und $q \in E((M \setminus \{q\}) \cup \{p\}) \setminus E(M \setminus \{q\})$. Nach Lemma 3.3.2.4 gilt nun $p \in E((M \setminus \{q\}) \cup \{q\}) = E(M)$. \square

Lemma 3.3.4 *Es sei $M \subset \mathcal{P}$. Wenn $p \in E(M)$, so ist $E(M \cup \{p\}) = E(M)$.*

Beweis. Es sei $p \in E(M)$. Dann ist nach Lemma 3.3.1 $r(M \cup \{p\}) = r(M)$. Nach dem gleichen Argument gilt für jeden beliebigen Punkt $q \in E(M)$ die Beziehung $r(M \cup \{q\}) = r(M) = r(M \cup \{p\}) = r(M \cup \{p\} \cup \{q\})$ und damit die Behauptung. \square

Wir verallgemeinern nun die Begriffe Halbebenen und D -Konvexität.

Definition 3.3.2 *Es sei E eine n -Ebene und $G \subset E$ ein Gitter vom Rang $(n-1)$. Zwei Punkte $p, q \in E \setminus G$ liegen auf der selben Seite von G ($p \leftrightarrow_G q$), wenn für $G_1, G_2 \parallel G$ mit $p \in G_1, q \in G_2$ die Aussagen $G_1 = G_2$, $\mathcal{Z}(G; g_1, G_2)$ oder $\mathcal{Z}(G, G_2, g_1)$ gelten.*

Auch die Relation \leftrightarrow_G ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, also eine Äquivalenzrelation.

Lemma 3.3.5 *Für eine n -Ebene E und ein Rang- n Gitter G zerlegt \leftrightarrow_G die Menge $E \setminus G$ in genau zwei Äquivalenzklassen.*

Beweis. Es sei $\tau \in \mathcal{T}_{|E}$ mit $\tau(G) \neq G$. Ein Punkt $p \in G$ hat dann unter τ und $-\tau$ Bilder auf verschiedenen Seiten von G . Deshalb existieren wenigstens 2 Äquivalenzklassen.

Es seien nun $p_1, p_2, p_3 \in E \setminus G$ paarweise verschiedene Punkte mit paarweise verschiedenen Gittern G_i , die parallel zu G sind und jeweils den Punkt p_i treffen, $i = 1, 2, 3$. Dann kann $\mathcal{Z}(G_1, G, G_2)$, $\mathcal{Z}(G_1, G, G_3)$, $\mathcal{Z}(G_2, G, G_3)$ nicht gleichzeitig gelten, denn sonst erhielte mit Lemma 3.1.4 man einen Widerspruch, daß E Rang n hat. Somit kann \leftrightarrow_G nicht mehr als zwei Klassen erzeugen. \square

Nun lassen sich die Begriffe offene und abgeschlossene positive bzw. negative **n -Halbebene** in entsprechender Weise verallgemeinern. Dieselbe Aussage gilt auch für die Symbolik.

Folgerung 3.3.2 *Jede n -Halbebene ist eine konvexe Menge.*

Beweis. Es seien h die durch das vollständige $(n - 1)$ -Gitter G erzeugte Halbebene und p_1, p_2 zwei Punkte aus h . Dann gibt es keinen Punkt in G , der im Sinne der Zwischenrelation auf Geraden zwischen p_1 und p_2 liegt.

Nehmen wir nun an, es gäbe einen Punkt p_3 in h^- mit $\mathcal{Z}(p_1, p_3, p_2)$. Es existieren dann drei Gitter G_1, G_2, G_3 vom Rang $n - 1$, die parallel zu G sind und $p_i \in G_i$ für $i = 1, 2, 3$. Für diese Gitter gilt $\mathcal{Z}(G_1, G_3, G_2)$. Weiterhin gilt aber auch $\mathcal{Z}(G_1, G, G_3)$, weil die Punkte von G_1 und G_3 jeweils auf verschiedenen Seiten von G liegen. Dies impliziert $\mathcal{Z}(G_1, G, G_2)$. Widerspruch.

Im Falle einer abgeschlossenen Halbebene H ist die Behauptung nur noch für Punkte auf G zu beweisen, da h echt in H enthalten ist. Liegen p_1 und p_2 auf G so ist jeder Punkt p_3 mit $\mathcal{Z}(p_1, p_3, p_2)$ ein Punkt des vollständigen Gitters und die Behauptung damit bewiesen. \square

Auch weiterhin soll eine Menge M **streng konvex** heißen, wenn sie sich als Durchschnitt von n -Halbebenen eines gemeinsamen Ranges darstellen läßt.

3.4 Pathologische n -Ebenen

Im Falle einer Ebene vom Rang 2 haben wir schon festgestellt, daß es gewisse unschöne Mengen gibt, die die Axiome 1 bis 7 erfüllen. Wir haben beobachtet, daß diese durch das Operieren linearer Abbildungen auf $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ erzeugt wird, die folgende Eigenschaften haben:

1. Rotation um ein irrationales Vielfaches von π
2. Das Urbild bezüglich \mathbb{Z}^2 liegt wieder in \mathbb{Z}^2
3. Kontraktion um einen rationalen Faktor.

Wir geben an dieser Stelle nur die Beweisideen der verallgemeinerten Ergebnisse aus Abschnitt 2.7 an. Da dieses Beispiel sehr ausführlich behandelt wurde, sollte es keine Schwierigkeiten bereiten, diese als richtig zu erkennen. Die Verallgemeinerung läßt sich zusammenfassen in der folgenden Aussage.

Behauptung 3.4.1 *Es existieren Geometrien vom Rang n , die den Axiomen 1 bis 7 genügen und die für $0 < k < n$ parallele Rang- k Gitter G_1, G_2 enthalten, zwischen denen ein weiteres paralleles Rang- k Gitter G liegt. \square*

Zuerst eine einfache und naheliegende Methode, eine Geometrie eines beliebigen Ranges n zu konstruieren, die die vorangegangene Behauptung erfüllen. Wir nutzen auf der einen Seite die Geometrie \mathcal{H} , die Rang zwei hat, und auf der anderen den \mathbb{Z}^{n-2} der Rang den Rang $n - 2$ hat und definieren durch Produktbildung die Rang- n -Geometrie $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \times \mathbb{Z}^{n-2}$. Offensichtlich ist dies eine pathologische Geometrie, denn da schon zwischen zwei parallele 1-Gittern g_1, g_2 , die in dem Untergitter $\mathcal{H} \times (0, \dots, 0)$, mit Geraden in \mathcal{H} korrespondieren, nach Abschnitt 2.7 mindestens ein weiteres 1-Gitter liegt, folgt für die Rang- $(k + 2)$ Gitter $g_1 \times \mathbb{Z}^k$ und $g_2 \times \mathbb{Z}^k$ mit $k = 1, \dots, n - 3$ eine analoge Aussage.

Eine weitere Möglichkeit komplexere Geometrien zu erzeugen, ist der induktive Aufbau einer Teilmenge des \mathbb{R}^n , der die Axiome 1 bis 7 erfüllt, in Analogie zu der aus Abschnitt 2.7 schon bekannten Methode. Dazu sei zuerst $\mathcal{H}_0 := \mathbb{Z}^n$. Wir betrachten nun die Abbildungen $\varphi_{k,l} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $k, l = 1, \dots, n$ und $k \neq l$. Diese sollen definiert sein durch:

$$\varphi_{k,l} := \frac{1}{z \cdot d} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & & & & & & & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & & & & & \vdots & \\ 0 & & & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & \\ 0 & & & 0 & x & 0 & & 0 & -y & 0 & & 0 & \\ 0 & & & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & \\ \vdots & & & & & & \ddots & & & & & \vdots & \\ 0 & & & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & & 0 & \\ 0 & & & 0 & y & 0 & & 0 & x & 0 & & 0 & \\ 0 & & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 & & 0 & \\ \vdots & & & & & & & & & & \ddots & \vdots & \\ 0 & & & & & & & & & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\varphi_{k,l}$ beschreibt also informal gesprochen eine Anwendung von φ in der “ k - l -Ebene”. Nun setzt man

$$\mathcal{H}_i := \bigcup_{\substack{k,l=1,\dots,n \\ k \neq l}} \varphi_{k,l}(\mathcal{H}_{i-1})$$

und $\mathcal{H} := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_i$. Dies ergibt eine Geometrie, wenn man die Geraden und Translationen von \mathbb{R}^n auf \mathcal{H} einschränkt. Die Eigenschaften von \mathcal{H} können auf dem gleichen Wege wie in Abschnitt 2.7 bewiesen werden. Insbesondere liegt \mathcal{H} dicht in \mathbb{R}^n .

3.5 Das zweite Diskretheitsaxiom

Axiom 9 (2. Diskretheitsaxiom) *Zu je zwei voneinander verschiedenen parallelen Gittern vom Rang k G_1, G_2 mit $0 < k < n$ gibt es höchstens endlich viele parallele Gitter G des selben Ranges, für die $\mathcal{Z}(G_1, G, G_2)$ gilt.*

Satz 3.5.1 1. *Jedes Rang n Gitter G erfüllt das zweite Diskretheitsaxiom.*

2. *Jede n -Ebene ist ein Gitter vom Rang n .*

Beweis. 1. Es seien G_1 und G_2 zwei Gitter vom Rang k für $0 < k < n$. Nach Folgerung 3.1.1 existiert eine in G einfache Verschiebung τ mit $\tau^i(G_1) = G_2$ für ein $i \in \mathbb{Z}$. Die Behauptung folgt nun aus dem 1. Diskretheitaxiom für Geraden, angewandt auf $g = \{q \in G : q = \tau^i(p), i \in \mathbb{Z}\}$ mit $p \in G$ beliebig.

2. E sei eine n -Ebene und G ein vollständiges Gitter vom Rang $k - 1$ in E . Offensichtlich gilt: $E = \bigcup \{G' : G' \parallel G \text{ und } G' \text{ hat Rang } n - 1\}$. E erfüllt Axiom 9. Es gibt also für ein solches Gitter $G' \in E$ und G ein $m \in \mathbb{N}$, so daß die Gitter G_1, \dots, G_m genau die Gitter mit $\mathcal{Z}(G, G_i, G')$, $i = 1, \dots, m$, sind. Diese können in der Art $\mathcal{Z}(G_{i-1}, G_i, G_{i+1})$ geordnet werden. Weiterhin gibt es eine Verschiebung $\tau \in \mathcal{T}_{|E}$ mit $\tau(G_i) = G_{i+1}$. Das kann erweitert werden zu $G_j = \tau^j(G)$ für $j \in \mathbb{Z}$. Somit ist $M = \{G_j : j \in \mathbb{Z}\}$ vom Rang n und Teilmenge von E . Es bleibt noch zu zeigen, daß diese keine echte Teilmenge sein kann. Angenommen es wäre so, dann existiert ein Punkt p in $E \setminus M$. Es existiert dann ein Gitter \hat{G} mit $\hat{G} \parallel G$ und $p \in \hat{G}$. E hat Rang n und erfüllt die Rang- n -Forderung, also liegt \hat{G} zwischen G_i und G_{i+1} für ein $i \in \mathbb{Z}$. Also existiert eine Verschiebung τ' mit $\tau'(G_i) = \hat{G}$. Anwendung von τ' auf G_1 liefert $\mathcal{Z}(G_1, \tau'(G_1), G_2)$. Dies widerspricht der Voraussetzung, daß Axiom 9 gilt, was die Gleichheit von E und M mit sich bringt.

Sind nun $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ die Generatoren von G , so ist E gleich dem Rang- n Gitter $G^n(p, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \tau)$ für ein $p \in G$. \square

Wir können nun argumentieren, daß alle Modelle für die Axiome 1-9, die den gleichen Rang haben untereinander äquivalent sind. Es macht damit Sinn von *dem* Gitter des Ranges n zu sprechen und als Standardmodell die Menge \mathbb{Z}^n zu wählen. Die zugehörige Translationenmenge kann als von der Basis erzeugt betrachtet werden, die die üblichen n Einheitsvektoren enthält. In Analogie zu Dimension des \mathbb{R} -Vektorraumes \mathbb{R}^n werden wir im weiteren Text den Begriff **Dimension** auch für den Rang des \mathbb{Z} -Moduls \mathbb{Z}^n verwenden.

Auch im Falle einer n -Ebene E werden wir ein $M \subset E$ **beschränkt** nennen, wenn $n + 1$ unabhängige Punkte p_1, \dots, p_{n+1} existieren mit

$$M \subset \bigcap_{i=1}^{n+1} H^+((n-1)G(p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_{n+1}), p_i).$$

Folgerung 3.5.1 *Für eine n -Ebene E gelten folgende Aussagen*

1. *Jede beschränkte Teilmenge ist endlich.*
2. *Jede offene Halbebene kann auch als abgeschlossene Halbebene dargestellt werden.* □

Kapitel 4

Der topologische Ansatz

In diesem Teil des Textes soll geklärt werden, was es für eine Teilmenge des \mathbb{Z}^n bedeutet, zusammenhängend zu sein, welches ihr Inneres bzw. Äußeres und was ihr Rand ist.

Diese Begriffe lassen sich durch zwei verschiedene Ansätze, die in gewissen Punkten miteinander vereinbar sind, formalisieren. Zum Einen ist das der streng topologische Ansatz, der auf Pavel Alexandroff [1] zurückgeht und der den Begriff des topologischen Raumes nichttrivial auf diskrete Mengen ausdehnt; zum Anderen der graphentheoretische Ansatz, der die Menge \mathbb{Z}^n als Knotenmenge eines unendlichen Graphen mit den durch die elementaren Translationen gegebenen Kanten auffaßt. Dieser Ansatz geht im wesentlichen auf Azriel Rosenfeld und T.Yung Kong [17] zurück.

4.1 Topologische Grundlagen

In diesem Abschnitt sollen die Grundbegriffe der topologischen Räume eingeführt werden. Diese stammen aus dem Buch von Querenburg [20].

Definition 4.1.1 *Ein Paar $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$ heißt topologischer Raum, wenn \mathcal{P} eine Menge und $\mathcal{T} \subset \mathfrak{P}(\mathcal{P})$ ein System von **offenen** Menge (**die Topologie**) mit folgenden Eigenschaften ist:*

1. $O_i \in \mathcal{T}, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$
2. $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}$
3. $\mathcal{P}, \emptyset \in \mathcal{T}$

Eine triviale Topologie auf \mathcal{P} ist die **diskrete Topologie** $\mathfrak{P}(\mathcal{P})$.

Die Teilmengen von \mathcal{P} , deren Komplement offen ist, heißen **abgeschlossen**. Eine duale Charakterisierung topologischer Räume ist auch über die abgeschlossenen Mengen möglich. Eine offene Menge $U \in \mathcal{T}$ heißt **Umgebung** eines Punktes $x \in \mathcal{P}$, wenn x in U liegt.

Ein topologischer Raum, in dem statt der Forderung (2) das folgende, stärkere Forderung gilt, heißt **Alexandroff-Raum**.

$$2'. O_i \in \mathcal{T}, i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}.$$

Alle Resultate über topologische Räume gelten auch in Alexandroff-Räumen.

Ein topologischer Raum erfüllt je nach Struktur seiner Topologie verschiedene Separationsseigenschaften:

Definition 4.1.2 *Ein topologischer Raum $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$ hat die Separationseigenschaft*

$$T_0: \bigwedge_{x, y \in \mathcal{P}}, x \neq y \bigvee_{U \in \mathcal{T}} : (x \in U \not\supset y) \vee (x \notin U \ni y)$$

$$T_1: \bigwedge_{x, y \in \mathcal{P}}, x \neq y \bigvee_{U \in \mathcal{T}} : x \in U \not\supset y$$

$$T_2: \bigwedge_{x, y \in \mathcal{P}}, x \neq y \bigvee_{U, V \in \mathcal{T}} : (x \in U \not\supset y) \wedge (x \notin V \ni y) \wedge (U \cap V = \emptyset)$$

Man sieht leicht, daß jeder T_i -Raum ein T_{i-1} -Raum ist.

Wenn man nun diese Trennungsaxiome ins Spiel bringt, sieht man sehr schnell, daß es keinen Sinn macht, die Forderung (2') für T_1 - oder T_2 -Räume einzuführen:

Behauptung 4.1.1 *Ein Alexandroff-Raum, der eines der Trennungsaxiome T_1 oder T_2 erfüllt, hat notwendig die diskrete Topologie.*

Beweis. Sei \mathcal{P} ein T_1 -Raum, $p \in \mathcal{P}$ und U eine Umgebung von p . Ist $U = \{p\}$ sind wir fertig. Ansonsten existiert ein $q \neq p$ in U und nach Eigenschaft (1) eine Umgebung U' , die p aber nicht q enthält. Der Durchschnitt aller dieser Mengen ist offen, \mathcal{P} also diskret.

Der Beweis für T_2 -Räume ist analog. □

Um eine Topologie auf einer Menge beschreiben zu können, reicht es aus, eine bestimmte Familie aller offenen Mengen anzugeben. Dieses System \mathcal{B} von

offenen Mengen heißt **Basis** der Topologie von $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$, wenn jede der offenen Mengen als beliebige Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} dargestellt werden kann. Der topologische Raum heißt **lokal endlich**, wenn jeder Punkt $p \in \mathcal{P}$ sowohl eine endliche offene als auch eine endliche abgeschlossene Menge besitzt, die ihn enthält.

Im folgenden wird erklärt, wie man aus bestehenden topologischen Räumen neue

Definition 4.1.3 Sei (P_i, \mathcal{T}_i) , $i \in I$ eine Familie topologischer Räume, $\mathcal{P} = \prod_{i \in I} \mathcal{P}_i$ und $p_i : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_i$ die Projektion. Die **Produkttopologie** \mathcal{T} wird durch die Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{k \in K} p_k^{-1}(O_k) : O_k \in \mathcal{T}_k, K \subset I, K \text{ endlich} \right\}$$

definiert. $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$ heißt dann topologisches Produkt der $(\mathcal{P}_i, \mathcal{T}_i)$.

Definition 4.1.4 Sei $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subset \mathcal{P}$. Mit der Topologie

$$\mathcal{T}|_A = \{O \cap A : O \in \mathcal{T}\}$$

wird A zu einem topologischen Raum $(A, \mathcal{T}|_A)$. $\mathcal{T}|_A$ heißt Relativtopologie von \mathcal{P} bezüglich A .

Definition 4.1.5 Eine Abbildung $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ zwischen zwei topologischen Räumen $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$, $(\mathcal{Q}, \mathcal{U})$ heißt **stetig**, wenn für $O \in \mathcal{U}$ die Menge $f^{-1}(O)$ in \mathcal{T} liegt.

Definition 4.1.6 Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt **zusammenhängend**, wenn er nicht in zwei nichtleere offene Mengen zerlegt werden kann, d.h:

$$\mathcal{P} = O_1 \cup O_2, O_1, O_2 \in \mathcal{T}, O_1 \neq \emptyset \neq O_2 \Rightarrow O_1 \cap O_2 \neq \emptyset.$$

Eine Menge $A \subset \mathcal{P}$ heißt zusammenhängend, wenn sie bezüglich der Relativtopologie zusammenhängend ist.

Lemma 4.1.1 Es sei $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$ ein zusammenhängender topologischer Raum und $(\mathcal{Q}, \mathcal{T}')$ ein topologischer Raum. Ist $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ eine stetige Abbildung, so ist \mathcal{Q} zusammenhängend.

Beweis. Angenommen der Raum (Q, \mathcal{T}') sei nicht zusammenhängend. Dann existieren Mengen $O_1, O_2 \in \mathcal{T}'$, $O_1 \neq \emptyset \neq O_2$, $O_1 \cup O_2 = Y$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Dann sind $f^{-1}(O_1)$ und $f^{-1}(O_2)$ offen in \mathcal{P} . $f^{-1}(O_1) \neq \emptyset \neq f^{-1}(O_2)$ und $f^{-1}(O_1 \cup O_2) = X$. Wegen $f^{-1}(O_1 \cap O_2) = \emptyset$ wäre dann \mathcal{P} nicht zusammenhängend, was ein Widerspruch ist. \square

Aus der Stetigkeit der Projektionen p_i in der Definition der Produkttopologie folgt:

Lemma 4.1.2 *Ein topologischer Produktraum $\mathcal{P} = \prod_{i \in I} \mathcal{P}_i$ ist genau dann zusammenhängend, wenn die einzelnen Faktoren zusammenhängend sind.* \square

In der Topologie wird ein **Weg** für gewöhnlich als eine stetige Abbildung $w : I \rightarrow \mathcal{P}$ von dem Intervall $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ in den topologischen Raum \mathcal{P} definiert. Da wir im weiteren mit Alexandroff-Räumen über abzählbaren Mengen arbeiten, genügt uns die folgende Definition: Ein Weg ist eine stetige Abbildung $w : \{0, \dots, m\} \rightarrow \mathcal{P}$ mit passend gewähltem $m \in \mathbb{N}$.

Definition 4.1.7 *Ein topologischer Raum $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$ heißt **wegzusammenhängend**, wenn zu je zwei Punkten $p, q \in \mathcal{P}$ ein Weg w existiert, mit $w(0) = p$ und $w(m) = q$.*

*Ein topologischer Raum $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$ heißt **lokal (weg-) zusammenhängend**, wenn zu jedem Punkt $p \in \mathcal{P}$ und zu jeder Umgebung U von p eine (weg-) zusammenhängende Umgebung V von p mit $V \subset U$ existiert.*

Folgerung 4.1.1 *Es gilt:*

1. *Ein wegzusammenhängender Raum ist zusammenhängend.*
2. *Ist \mathcal{P} zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, dann ist \mathcal{P} wegzusammenhängend.* \square

Definition 4.1.8 *Es seien X und Y topologische Räume. Eine Homotopie von X nach Y ist eine Schar $h_t : X \rightarrow Y$, wobei der Parameter t das Einheitsintervall $I = [0, 1]$ durchläuft, so daß folgende Bedingung erfüllt ist: die Funktion $H : X \times I \rightarrow Y$, $H(x, t) = h_t(x)$, ist stetig. Dabei hat $X \times I$ die Produkttopologie.*

Zwei Funktionen heißen homotop ($f \cong g : X \rightarrow Y$), wenn es eine Homotopie $h_t : X \rightarrow Y$ mit $h_0 = f$ und $h_1 = g$ gibt. Ist g eine konstante Abbildung, so heißt f nullhomotop.

*Eine Homotopie heißt **linear**, wenn sie linear in t ist.*

Wie bei Wegen muß I nicht unbedingt das Einheitsintervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ sein. Es ist auch möglich ein Intervall des \mathbb{Z} mit der relativen Khalimsky-Topologie anzunehmen (z.B. die Menge $\{0, 1\}$ mit der Sierpinski-Topologie).

Definition 4.1.9 Ein topologischer Raum $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$ heißt **einfach zusammenhängend**, wenn jeder geschlossene Weg nullhomotop ist.

Das heißt, es läßt sich jeder geschlossene Weg auf einen Punkt zusammenziehen.

Lemma 4.1.3 Ist $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$ Vereinigung zweier offener, einfach zusammenhängender Teilräume, deren Durchschnitt wegzusammenhängend ist, so ist $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$ einfach zusammenhängend.

Beweis. Diese Behauptung ist Korollar 5.3.9 in Stöcker und Zieschang [22].
□

Definition 4.1.10 Es seien $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ Punkte in allgemeiner Lage. Die Punktmenge

$$\sigma = \sigma_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=0}^k \lambda_i x_i \text{ mit } \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1, \lambda_0, \dots, \lambda_k > 0 \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

heißt das (offene) **Simplex mit den Ecken** x_0, \dots, x_k . Wir schreiben auch $\sigma = (x_0, \dots, x_k)$. Die Zahl k heißt Dimension von σ . σ heißt auch k -Simplex.

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=0}^k \lambda_i x_i \text{ mit } \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1, \lambda_0, \dots, \lambda_k \geq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

heißt das **abgeschlossene** k -Simplex. Wir schreiben auch $\bar{\sigma} = [x_0, \dots, x_k]$.

Definition 4.1.11 Es seien $\sigma, \tau \subset \mathbb{R}^n$ Simplizes. τ heißt **Seite von** σ , Bezeichnung: $\tau \leq \sigma$, wenn die Ecken von τ auch Ecken von σ sind. $\tau < \sigma$ bedeutet $\tau \leq \sigma$ und $\tau \neq \sigma$.

Definition 4.1.12 Ein **Simplizialkomplex** K im \mathbb{R}^n ist eine endliche Menge von Simplizes im \mathbb{R}^n mit folgenden Eigenschaften

1. Für jedes $\sigma \in K$ und $\tau < \sigma$ ist $\mathcal{T} \in K$.
2. Für beliebige $\sigma, \tau \in K$ mit $\sigma \neq \tau$ ist $\sigma \cap \tau = \emptyset$.

Definition 4.1.13 Es sei K ein Simplizialkomplex im \mathbb{R}^n . Die **geometrische Realisierung** von K ist die Menge

$$\bigcup_{\sigma \in K} \sigma \subset \mathbb{R}^n$$

Ein simplizialer Komplex K heißt **homogen $(n - 1)$ -dimensional**, wenn jeder Simplex aus K Seite eines $(n - 1)$ -Simplexes in K ist. Ein homogen $(n - 1)$ -dimensionaler simplizialer Komplex K heißt **stark zusammenhängend**, wenn zu je zwei $(n - 1)$ -Simplizes σ und σ' aus K eine Folge von $(n - 1)$ -Simplizes $\sigma = \sigma_0, \dots, \sigma_l = \sigma'$ existiert, so daß σ_i und σ_{i+1} eine gemeinsame $(n - 2)$ -Seite besitzen, für alle $i \in \{0, \dots, l - 1\}$.

Definition 4.1.14 Ein simplizialer Komplex K heißt kombinatorische $(n - 1)$ -Pseudomannigfaltigkeit ohne Rand, wenn gilt:

1. K ist homogen $(n - 1)$ -dimensional,
2. Zu jedem $(n - 2)$ -Simplex σ aus K existieren genau zwei $(n - 1)$ -Simplizes, die σ als Seite besitzen
3. K ist stark zusammenhängend.

4.2 Alexandroff-Räume

Jeder Alexandroff-Raum hat eine eindeutig bestimmte Basis, diese ist gegeben durch die Menge der kleinsten Umgebungen aller Punkte des Grundraumes. Diese kleinsten Umgebungen lassen sich leicht als Durchschnitt aller Umgebungen eines Punktes identifizieren. Wir bezeichnen für einen Alexandroff-Raum $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$ die kleinste Umgebung mit $U_{\mathcal{T}}(p)$. Analog existiert für jeden Punkt auch eine eindeutig bestimmte abgeschlossene Umgebung, die wir mit $C_{\mathcal{T}}(p)$ bezeichnen. Wir definieren nun $A_{\mathcal{T}}(p) := (U_{\mathcal{T}}(p) \cup C_{\mathcal{T}}(p)) \setminus \{p\}$ als die **Nachbarschaft** oder **Adjazenz** von p in $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$. $A_{\mathcal{T}}(p)$ ist ein Alexandroff-Raum unter der Relativtopologie.

Analog sind diese Symbole für Mengen M von Punkten aus \mathcal{P} definiert:

$$U_{\mathcal{T}}(M) := \left\{ p \in \mathcal{P} : \bigvee_{q \in M} p \in U_{\mathcal{T}}(q) \right\}$$

$$C_{\mathcal{T}}(M) := \left\{ p \in \mathcal{P} : \bigvee_{q \in M} p \in C_{\mathcal{T}}(q) \right\}$$

Behauptung 4.2.1 *Die Mengenfunktionen $U_{\mathcal{T}}$ und $C_{\mathcal{T}}$ sind Hüllenoperatoren, das heißt es gilt:*

1. $U_{\mathcal{T}}(\emptyset) = \emptyset$.
2. $M \subset N \Rightarrow U_{\mathcal{T}}(M) \subset U_{\mathcal{T}}(N)$.
3. $U_{\mathcal{T}}(U_{\mathcal{T}}(M)) = U_{\mathcal{T}}(M)$.

Beweis. Die erste Aussage ist trivial. Um die zweite einzusehen sei $p \in U_{\mathcal{T}}(M)$. Das heißt, es existiert ein $q \in M$ mit $p \in U_{\mathcal{T}}(q)$. Nach Voraussetzung ist $q \in N$ und damit auch $p \in U_{\mathcal{T}}(N)$.

Zum Beweis der dritten Aussage sei zuerst $p \in U_{\mathcal{T}}(U_{\mathcal{T}}(M))$, womit ein q in $U_{\mathcal{T}}(M)$ existiert mit $p \in U_{\mathcal{T}}(q)$. Ist $q \in M$, ist auch $p \in U_{\mathcal{T}}(M)$. Ansonsten existiert ein $q' \in M$, so daß q in $U_{\mathcal{T}}(q')$ liegt. Nach der T_0 Eigenschaft liegt dann auch p in $\perp\mathcal{T}(q')$ und somit in $U_{\mathcal{T}}(M)$. Die umgekehrte Inklusion folgt aus 2. \square

Behauptung 4.2.2 *Es sei $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$ ein Alexandroff-Raum, der einen Punkt p enthält, so daß die einzige offene Umgebung von p die Menge \mathcal{P} selbst ist. Dann ist $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$ zusammenziehbar.*

Beweis. Wir definieren eine Homotopie $F : \mathcal{P} \times I \rightarrow \mathcal{P}$ durch $F(q, t) = q$ für $0 \leq t < 1$ und $F(q, 1) = p$ für alle $q \in \mathcal{P}$. (Wir können auch $\{0, 1\}$ mit der Sierpinski-Topologie $\{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$ annehmen.)

Wir zeigen, daß F stetig ist. Sei $M \subset \mathcal{P}$ offen.

1. Fall: $p \in M$. O.B.d.A. $M = \mathcal{P}$. Damit ist $F^{-1}(M) = \mathcal{P} \times I$ offen.

2. Fall $p \notin M$. Dann ist $F^{-1}(M) = M \times [0, 1)$ offen. \square

Behauptung 4.2.3 *Ist $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$ ein Alexandroff-Raum und $p \in \mathcal{P}$, dann ist $U_{\mathcal{T}}(p)$ zusammenziehbar. Damit hat $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$ eine Basis zusammenziehbarer offener Mengen. Insbesondere ist $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$ lokal zusammenziehbar.*

Beweis. Wir nutzen die Behauptung 4.2.2 mit $Y = U(x)$ und $\omega = x$. \square

Wir können folgenden Dimensionsbegriff für Alexandroff-Räume einführen, siehe auch Evako et.al. [5]:

Definition 4.2.1 *Es sei $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$ ein Alexandroff-Raum und $p \in \mathcal{P}$.*

- $\dim_{\mathcal{P}}(p) := 0$, falls $U_{\mathcal{T}}(p) \setminus \{p\} = \emptyset$.
- $\dim(\mathcal{P}) := n$, falls ein Punkt p in \mathcal{P} existiert mit $\dim_{\mathcal{P}}(p) = n$ und für alle $q \in \mathcal{P}$ ein $k \leq n$ existiert mit $\dim_{\mathcal{P}}(q) = k$.
- $\dim_{\mathcal{P}}(p) := n+1$, falls $\dim(U_{\mathcal{T}}(p) \setminus \{p\}) = n$. Dabei besitzt $U_{\mathcal{T}}(p) \setminus \{p\}$ die Relativtopologie.
- Existiert kein $k \in \mathbb{N}$, so daß $\dim_{\mathcal{P}}(p) = k$ so sei $\dim_{\mathcal{P}}(p) = \infty$.

Definition 4.2.2 *Es heißt $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$ 0-Fläche, wenn \mathcal{P} zweipunktig und unter \mathcal{T} unzusammenhängend ist.*

$(\mathcal{P}, \mathcal{T})$ heißt n -Fläche für $n > 0$, wenn \mathcal{P} unter \mathcal{T} zusammenhängend ist und für alle $p \in \mathcal{P}$ $A_{\mathcal{T}}(p)$ eine $(n-1)$ -Fläche ist.

Eine n -Fläche $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$ heißt n -Sphäre, wenn \mathcal{P} endlich ist und \mathcal{P} einfach zusammenhängend ist für $n > 1$.

Nach Evako et.al.[5] gilt:

Satz 4.2.1 *Es sei $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$ ein Alexandroff-Raum, der eine n -Fläche mit $n > 2$ ist. Dann gilt für jeden Punkt $p \in \mathcal{P}$, daß $A_{\mathcal{T}}(p)$ einfach zusammenhängend ist. \square*

4.3 Zwei wichtige Klassen von Alexandroff-Räumen

Dieser Abschnitt behandelt zwei häufig benutzte Alexandroff-Topologien. Um sie einzuführen beginnen wir die Betrachtung mit der Menge \mathbb{Z} , die wir als diskrete Gerade erkannt haben. Welche Möglichkeit existiert, eine nichttriviale Topologie auf \mathbb{Z} einzuführen, so daß diese Menge unter unserer vorangegangenen Definition zusammenhängend ist?

Man sieht leicht ein, daß die Mengen

$$\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in \mathbb{Z}, x \equiv 0(2)\} \cup \{\{x-1, x, x+1\} : x \in \mathbb{Z}, x \equiv 1(2)\}$$

und

$$\mathcal{B}' = \{\{x\} : x \in \mathbb{Z}, x \equiv 1(2)\} \cup \{\{x-1, x, x+1\} : x \in \mathbb{Z}, x \equiv 0(2)\}$$

beides Basen von Topologien sind. Diese unterscheiden sich nur um eine Translation. Wir werden uns deshalb im folgenden auf die Basis \mathcal{B} beschränken und die von ihr erzeugte Topologie mit κ bezeichnen.

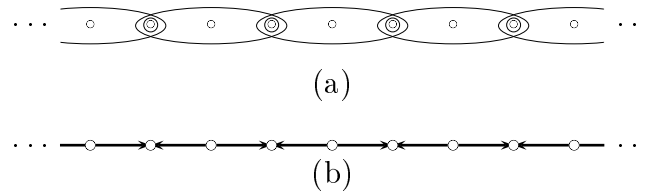


Abbildung 4.1: Bild (a) zeigt einen Ausschnitt aus (\mathbb{Z}, κ) . Die Basis der Topologie ist durch Ellipsen dargestellt. Der zugehörige gerichtete Graph ist in (b) dargestellt.

Behauptung 4.3.1 *Der Alexandroff-Raum (\mathbb{Z}, κ) ist zusammenhängend. \square*

Beim Übergang zum höherdimensionalen Fall, hat man wieder mehrere Möglichkeiten, \mathbb{Z}^n mit einer Topologie zu versehen. Wir betrachten nur zwei. Die einfachste Variante ist, \mathbb{Z}^n als n -faches kartesisches Produkt mit der Produkttopologie auszustatten. Wir bezeichnen diese als κ_n . Hierbei ist schon nach Definition klar, daß (\mathbb{Z}^n, κ_n) zusammenhängend ist. Diese Klasse von Räumen heißt Klasse der **Khalimsky-Räume**.

Behauptung 4.3.2 *Der Alexandroff-Raum (\mathbb{Z}^n, κ_n) ist zusammenhängend für alle $n > 1$.*

Beweis. Das folgt aus Lemma 4.1.2 □

Satz 4.3.1 *In den Khalimsky-Räumen (\mathbb{Z}^n, κ_n) gilt der diskrete Zerlegungssatz von Jordan-Brouwer.*

Beweis. Der Beweis ist klar, wenn man sich der Methoden der algebraischen Topologie bedient, denn der Raum (\mathbb{Z}^n, κ_n) ist isomorph zu einer Zellzerlegung des \mathbb{R}^n . Diese kann man ausgehend einer Zerlegung von \mathbb{R} durch topologische Produktbildung auf den \mathbb{R}^n verallgemeinern. Der \mathbb{R}^n wird folgendermaßen zerlegt:

$$\mathbb{R}^n = \{\{i\} : i \in \mathbb{Z}, i \equiv 0(2)\} \cup \{(i-1, i+1) : i \in \mathbb{Z}, i \equiv 1(2)\}$$

Dabei bezeichnet $(i-1, i+1)$ das offene reelle Intervall zwischen den Zahlen.

Da der Satz von Jordan-Brouwer für jeden \mathbb{R}^n , $n > 1$ gilt, gilt er offensichtlich auch für den n -dimensionalen Khalimsky Raum.

In Abschnitt 6.3 wird ein zweiter Beweis dieses Satzes geliefert. □

Die zweite Möglichkeit, eine Klasse topologischer Räume zu konstruieren, ist die Verallgemeinerung der von Marcus und Wyse in [23] vorgeschlagenen Topologie. Die Klasse (\mathbb{Z}^n, μ_n) von **Marcus-Wyse-Räumen** ist gegeben durch die Basen

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_n = & \{ \{(x_1, \dots, x_n)\} : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n, \sum_{i=1}^n x_i \equiv 0(2) \} \\ & \cup \{ U(x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n, \sum_{i=1}^n x_i \equiv 1(2) \} \end{aligned}$$

wobei die Menge $U(x_1, \dots, x_n)$ definiert ist als:

$$\bigcup_{i=1}^n \{ (x_1, \dots, x_i + 1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_i - 1, \dots, x_n) \} \cup \{ (x_1, \dots, x_n) \}.$$

Daß μ_n eine Topologie auf \mathbb{Z}^n ist, sieht man leicht indem man die Definition prüft.

Behauptung 4.3.3 *Der Alexandroff-Raum (\mathbb{Z}^n, μ_n) ist zusammenhängend.*

Beweis. Es seien $K_1, K_2 \in \mu^n$ mit $\mathbb{Z}^n = K_1 \cup K_2$, $K_1, K_2 \neq \emptyset$ und $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Dann existiert o.B.d.A. ein Punkt $(x_1, \dots, x_n) \in K_1$ für den der Punkt $(x_1, \dots, x_i + 1, \dots, x_n) \notin K_1$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$. Daher muß gelten, daß $(x_1, \dots, x_i + 1, \dots, x_n)$ ein Element aus K_2 ist.

1. Fall: $\sum_{i=1}^n x_i \equiv 0(2)$. Dann liegt der Punkt (x_1, \dots, x_n) in der Menge $U(x_1, \dots, x_i + 1, \dots, x_n)$, die ein Basiselement von μ_n ist. Da K_2 offen und damit als Vereinigung von Basiselementen von μ_n darstellbar ist, liegt (x_1, \dots, x_n) in K_2 , was ein Widerspruch zur Disjunktheit von K_1 und K_2 ist.
2. Fall: analog zum ersten Fall. □

Behauptung 4.3.4 *Der Raum (\mathbb{Z}^n, μ_n) erfüllt den Satz von Jordan-Brouwer nicht.*

Beweis. Die Menge M der in Abbildung 4.2 dargestellten Punkte des \mathbb{Z}^2 ist offensichtlich zusammenhängend unter μ_n ihr Komplement besteht aber aus drei Zusammenhangskomponenten. Analoge Beispiele lassen sich auch für die Dimensionen $n > 2$ konstruieren. □

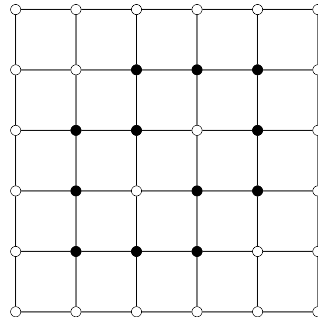


Abbildung 4.2: Die durch die schwarzen Punkte dargestellte Menge erfüllt unter der Marcus-Wyse-Topologie nicht den Jordanschen-Kurvensatz

Kapitel 5

Der graphentheoretische Ansatz

In der praktischen Bildverarbeitung wird ein anderer Zugang zur Definition topologischer Eigenschaften einer Teilmenge M von \mathbb{Z}^n gewählt: Um den Zusammenhang der Menge zu erklären, verwendet man eine Adjazenzrelation, die für einen Punkt der Menge spezifiziert, welches seine direkten Nachbarn sind. Dieser Ansatz hat den Nachteil, daß Zusammenhangsparadoxa in Bezug auf das Komplement der Menge M in \mathbb{Z}^n entstehen. So kann man im Allgemeinen nicht den Satz von Jordan-Brouwer beweisen, falls für das Komplement von M die gleiche Adjazenzrelation gewählt wird wie für M selbst. Um diesem Dilemma zu entgehen, sucht man “gute” Paare von Nachbarschaftsrelationen, die es ermöglichen, ein diskretes Äquivalent des genannten Satzes zu zeigen.

5.1 Grundlagen

Definition 5.1.1 Für eine Menge \mathcal{P} heißt die Relation $\alpha \subset \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ **Adjazenzrelation**, wenn α folgende Eigenschaften hat:

1. α ist finitär, d.h. $\forall p \in \mathcal{P} : |\alpha(p)| < \infty$.
2. \mathcal{P} ist bezüglich α zusammenhängend.
3. Jede endliche Teilmenge von \mathcal{P} hat höchstens eine unendliche Zusammenhangskomponente als Komplement.

Dabei heißt $M \subset \mathcal{P}$ **zusammenhängend** wenn für zwei Punkte p, q aus M Punkte p_0, \dots, p_m und ein $m \in \mathbb{N}$ existieren mit $p_0 = p$, $p_m = q$ und $p_{i+1} \in A(p_i)$ für $i \in \{0, \dots, m-1\}$. Man vergleiche diese Definition mit der des Wegzusammenhanges in topologischen Räumen.

Im weiteren werden wir Paare (α, β) von Adjazenzrelationen im Raum \mathbb{Z}^n betrachten. Dabei steht α für die Zusammenhangsrelation auf einer Teilmenge $M \subset \mathbb{Z}^n$, während β den Zusammenhang von $M^C = \mathbb{Z}^n \setminus M$ bezeichnet.

Die Generatoren τ_1, \dots, τ_n des Grundraumes \mathbb{Z}^n induzieren in natürlicher Weise eine Adjazenzrelation π :

Definition 5.1.2 Zwei Punkte p, q der Menge \mathbb{Z}^n heißen **proto-adjazent** ($p \in \pi(q)$), wenn ein $i \in \{1, \dots, n\}$ existiert mit $p = \tau_i(q)$ oder $p = \tau_i^{-1}(q)$.

Wegen der Bemerkung nach Satz 3.5.1 können wir die Einheitsvektoren des \mathbb{Z}^n als seine Generatoren annehmen.

Eine zweite grundlegende Adjazenzrelation für \mathbb{Z}^n ist ω :

$$\omega(p) := \{q \in \mathbb{Z}^n : |p_i - q_i| \leq 1, 0 \leq i \leq n\}.$$

Behauptung 5.1.1 Für alle $n \geq 2$ und alle $p \in \mathbb{Z}^n$ ist $\omega(p)$ unter π zusammenhängend.

Beweis. Das ist ein Spezialfall der Folgerung 6.2.1. □

Im weiteren seien α und β zwei Adjazenzrelationen auf \mathbb{Z}^n , so daß

$$\pi(p) \subset \alpha(p), \beta(p) \subset \omega(p)$$

für alle $p \in \mathbb{Z}^n$ gilt.

Behauptung 5.1.2 Die Menge \mathbb{Z}^n ist π -zusammenhängend.

Beweis. Es seien $p, q \in \mathbb{Z}^n$ beliebig gewählt. Es ist zu zeigen, daß ein π -Weg von p nach q existiert. Es ist $p = (p_1, \dots, p_n)$ und $q = (q_1, \dots, q_n)$. Wir beweisen durch Induktion über $k = \sum_{j=1}^n |q_j - p_j|$. Für $k = 1$ unterscheiden sich die Punkte p und q in einer Koordinate i um genau 1, da alle Summanden der Summe positiv und ganzzahlig sind. Daraus folgt $\tau_i(p) = q$ oder

$\tau_i^{-1}(p) = q$ und somit $q \in \pi(p)$. Für $k > 1$ suchen wir den kleinsten Index $i \in \{1, \dots, n\}$, so daß $p_i \neq q_i$. Der Punkt

$$p' = \begin{cases} (p_1, \dots, p_i + 1, \dots, p_n) & \text{falls } q_i > p_i \\ (p_1, \dots, p_i - 1, \dots, p_n) & \text{falls } q_i < p_i \end{cases}$$

ist nach Definition π -adjazent zu p und

$$\sum_{j=1}^n |q_j - p'_j| = \sum_{j=1, j \neq i}^n |q_j - p_j| + |q_i - p_i| - 1$$

Nach Induktionsvoraussetzung existiert also ein π -Pfad

$$p' = p^{(0)}, \dots, p^{(k-1)} = q$$

und $p, p^{(0)}, \dots, p^{(k-1)}$ ist der gesuchte Pfad. □

Definition 5.1.3 *Ein Punkt $p \in M \subset \mathbb{Z}^n$ heißt **einfach** für ein Paar (α, β) , wenn gilt*

1. *M und $M \setminus \{p\}$ besitzen die gleiche Anzahl von α -Zusammenhangskomponenten*
2. *M^C und $(M \setminus \{p\})^C$ besitzen die gleiche Anzahl von β -Zusammenhangskomponenten.*

Leider ist es nicht möglich die Definition 4.2.1 einer topologischen Fläche direkt graphentheoretisch nachzubilden. Ein Gegenbeispiel ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Der Grund dafür ist, daß die meisten graphentheoretisch “topologisierten” Mengen keine topologischen Räume sind. Dennoch haben diese eine wesentliche praktische Bedeutung. Es macht durchaus Sinn die Definition 4.2.1 noch einmal zu untersuchen.

Die Ergebnisse aus Abschnitt 4.3 legen es nahe, das wir uns nur mit Räumen der Dimension n für $n \geq 2$ beschäftigen brauchen. $(n-1)$ -Flächen sind für diese n stets zusammenhängend und für alle Punkte $p \in M \subset \mathbb{Z}^n$ einer $(n-1)$ -Fläche M gilt, daß sie zu zwei Zusammenhangskomponenten von M^C adjazent sind.

Um eine geeignete Anschauung einer graphentheoretisch definierten $(n-1)$ -Fläche zu erhalten, betrachten wir nicht die gesamte Nachbarschaft eines gegebenen Punktes. Wir wählen Kuben des Gitters aus und betrachten die Nachbarschaften α und β in diesen:

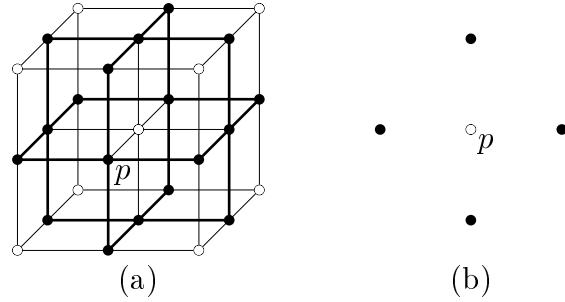


Abbildung 5.1: (a) Die dargestellte Menge ist unter π zusammenhängend und bildet eine 2-Fläche gemäß Def. 5.2.1. Sie ist aber keine topologische Fläche nach Def. 4.2.1 wie (b) zeigt. Die π -Nachbarn von p in M bilden keine topologische 1-Sphäre, da sie unter π nicht zusammenhängen.

Es sei

$$C^k = \{0, 1\}^k \times \{0\}^{n-k} \subset \mathbb{Z}^n$$

der k -dimensionale Standard**kubus** in \mathbb{Z}^n . Dann ist

$$\mathcal{C}^k = [0, 1]^k \times \{0\}^{n-k} \subset \mathbb{R}^n$$

der zugehörige k -dimensionale Standard**würfel** im \mathbb{R}^n .

Es kann der C^k auf $\binom{n}{k}$ verschiedene Arten in C^n eingebettet werden.

Ein allgemeiner k -Kubus im \mathbb{Z}^n entsteht durch Translation aus einem Standard-Kubus. Analog verhält es sich mit dem zugehörigen Würfel.

Definition 5.1.4 *Es sei $M \subset \mathbb{Z}^n$, $n \geq 2$ und C ein beliebiger k -Kubus, $2 \leq k \leq n$. M^C wird von M in C unter dem Paar (α, β) **nicht getrennt**, wenn folgendes gilt:*

Für jede α -Komponente M' von $C \cap M$ und jeden $(k-2)$ -Unterkubus C^ von C , der $C^* \cap M' \neq \emptyset$ maximal macht und für den die beiden Mengen $\tau_1(C^*) \setminus M, \tau_2(C^*) \setminus M \neq \emptyset$ in einer gemeinsamen β -Komponente von M^C liegen, gilt:*

$$(\tau_1 \tau_2)^{-1}(\tau_1 \tau_2(C^*) \cap M') \subset \tau_1^{-1}(\tau_1(C^*) \cap M') \cap \tau_2^{-1}(\tau_2(C^*) \cap M')$$

Wir werden im weiteren nur auf den Fall eingehen, daß $C \cap M$ nur eine α -Komponente besitzt. Diese Vorgehensweise läßt sich mit der Auffassung rechtfertigen, daß aus der Sicht einer α -Komponente M' jede andere α -Komponente in $C \cap M$ genauso gut zum Komplement von M gehören kann.

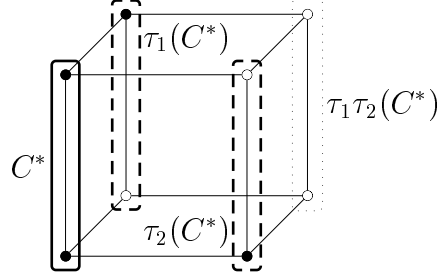


Abbildung 5.2: C^* hat einen maximalen Schnitt mit der α -Komponente M' . $\tau_1(C^*) \setminus M'$ und $\tau_2(C^*) \setminus M'$ sind beide nichtleer und gehören zu einer β -Komponente von M^C . Da weiterhin $\tau_1\tau_2(C^*) \cap M' = \emptyset$, ist die Eigenschaft aus Definition 5.1.4 für dieses C^* erfüllt. Trotzdem trennt im dargestellten Kubus M' die β -Komponente. Warum?

Wir benötigen diese Eigenschaft von M bei der Konstruktion der Simplizes eines Simplicialkomplexes. Diese Konstruktion wird in jedem Kubus α -Komponentenweise vorgenommen und hängt daher nicht von dem etwaigen Vorhandensein anderer α -Komponenten ab.

Wir sagen nun, daß M unter dem Paar (α, β) die **Trennungseigenschaft** erfüllt, wenn von jedem k -Kubus C wie in der Definition 5.1.4 die Menge M^C von M in C nicht getrennt wird.

Die Bedeutung der Trennungseigenschaft von Kuben ist in der Abbildung 5.3 dargestellt.

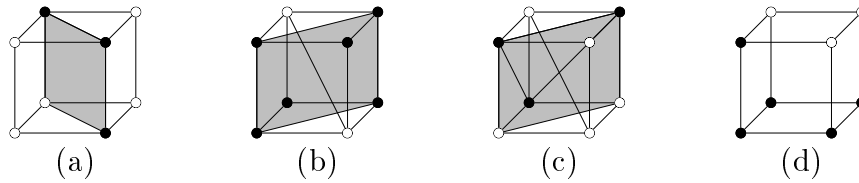


Abbildung 5.3: In den Fällen (a) bis (c) liegt jeweils eine Trennung vor. Die Trennung wird durch die von C^* und $\tau_1\tau_2(C^*)$ aufgespannten grauen Fläche verdeutlicht. Im Fall (d) liegt keine Trennung vor, da die einzige Möglichkeit zur Wahl von C^* , ein 1-Kubus ist, der nur schwarze Punkte enthält. In einem Fall ist die in Definition 5.1.4 geforderte Inklusion erfüllt, in den anderen Fällen ist $\tau_1(C^*) \setminus M'$ oder $\tau_2(C^*) \setminus M'$ leer. Damit wird die Forderung der Definition trivialerweise wahr.

Behauptung 5.1.3 *Es sei C ein k -Kubus für $0 \leq k \leq n$, der in $C \setminus M$ genau zwei β -Komponenten besitzt. Dann gilt*

$$k \leq |C \cup M| \leq 2^k - 2.$$

Beweis. Die obere Schranke folgt aus der Existenz von mindestens zwei Punkten in $C \setminus M$ und der Beobachtung, daß ein k -Kubus k Eckpunkte besitzt.

Die untere Schranke ergibt sich für den Fall, daß eine der 2 β -Komponenten einpunktig ist. Dann müssen wenigstens die π -Nachbarn dieses Punktes in $C \cap M$ liegen. Derer gibt es im k -Kubus k viele. \square

Behauptung 5.1.4 *Eine l -punktige β -Komponente von $C \setminus M$ eines k -Kubus C hat in M mindestens*

$$(k - m) \cdot l + 2^m - l$$

β -Nachbarn. Dabei ist $m = \lfloor \log_2 l \rfloor$.

Beweis. Wir verteilen die l Punkte zuerst auf einen m -Kubus C^m . Dieser m -Kubus kann in C in $(k - m)$ Dimensionen verschoben werden. Damit hat jeder der l Punkte außerhalb von C^m genau $(k - m)$ π -Nachbarn. In C kann es noch $2^m - l$ Nachbarn geben. \square

Lemma 5.1.1 *Es sei $M \subset \mathbb{Z}^n$ eine Menge, die die Trennungseigenschaft besitzt und für die alle Kuben einen α -zusammenhängenden Schnitt mit M besitzen. Dann gilt für jede β -Zusammenhangskomponente K in $C \subset M$, für einen k -Kubus $0 \leq k \leq n$, daß in jedem l -Unterkubus C' von C höchstens eine β -Zusammenhangskomponente von $C' \setminus M$ in K liegt.*

Beweis. Es sei C ein k -Kubus, der einen l -Unterkubus C' besitzt, so daß zwei β -Komponenten von $C' \setminus M$ in einer β -Komponente von $C \setminus M$ liegen. In $C' \setminus M$ gibt es mindestens zwei β -Komponenten.

Für einen $(l - 2)$ -Kubus C^* und gewisse Generatoren τ_1, τ_2 gilt:

$$C' = C^* \cup \tau_1(C^*) \cup \tau_2(C^*) \cup \tau_1\tau_2'(C^*).$$

Sind C^* und $\tau_1(C^*)$ ganz in M , so betrachten wir stattdessen den $(l - 1)$ -Kubus $C' := \tau_2(C^*) \cup \tau_1\tau_2(C^*)$. Spätestens im Fall $l = 2$ können wir wie folgt argumentieren: Es gibt einen $(l - 2)$ -Unterkubus C^* von C' , der eine maximale Anzahl von Punkten aus M enthält, sonst gäbe es in $C' \setminus M$ nur eine β -Komponente. Nach der Trennungseigenschaft gilt für diesen:

$$(\tau_1\tau_2)^{-1}(\tau_1\tau_2(C^*) \cap M) \subset (\tau_1^{-1}(\tau_1(C^*) \cap M)) \cap (\tau_2^{-1}(\tau_2(C^*) \cap M)).$$

Damit ist aber $C' \setminus M$ π -zusammenhängend. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme an C' . \square

5.2 Digitale Mannigfaltigkeiten

Definition 5.2.1 Eine α -zusammenhängende Menge $M \subset \mathbb{Z}^n$ heißt **(digitale) $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit** unter dem Paar (α, β) , wenn folgendes gilt:

1. Für jeden n -Kubus C ist $C \cap M$ α -zusammenhängend.
2. Für alle $p \in M$ besitzt $\omega(p) \setminus M$ genau zwei β -Zusammenhangskomponenten C_p und D_p .
3. Für jeden Punkt $p \in M$ und alle $q \in \alpha(p) \cap M$ ist q zu C_p und D_p β -adjazent.
4. M erfüllt die Trennungseigenschaft.

Die Unabhängigkeit der vier Eigenschaften werden in den Abbildungen 5.4 bis 5.7 dargestellt.

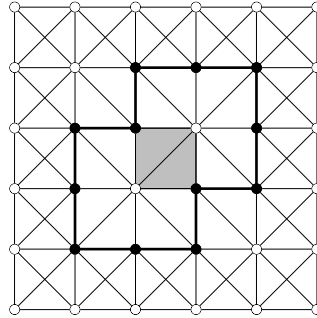


Abbildung 5.4: Die Unabhängigkeit der Eigenschaft 1 von den restlichen Eigenschaften der $(n-1)$ -Mannigfaltigkeiten. Die schwarzen Punkte des grau gekennzeichneten Kubus sind nicht α -zusammenhängend, während die restlichen Eigenschaften erfüllt sind.

Satz 5.2.1 Es sei $M \subset \mathbb{Z}^n$ eine $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit. Dann besteht $\omega(M) \setminus M$ aus genau zwei β -Zusammenhangskomponenten.

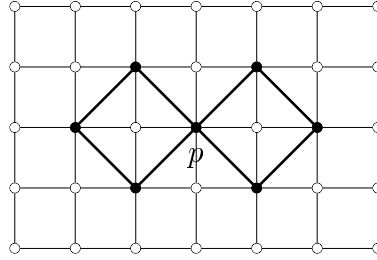


Abbildung 5.5: Die Unabhängigkeit der Eigenschaft 2 von den weiteren Eigenschaften der $(n-1)$ -Mannigfaltigkeiten. Für den gekennzeichneten Punkt p besteht $\omega(p) \setminus M$ aus 4 β -Zusammenhangskomponenten.

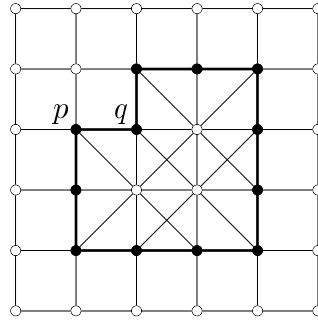


Abbildung 5.6: Die Unabhängigkeit der Eigenschaft 3 von den weiteren Eigenschaften der $(n-1)$ -Mannigfaltigkeiten. Der Punkt q ist in $\omega(p)$ nur zu einer β -Komponente von $\omega(p) \setminus M$ β -adjazent.

Beweis. Wir wissen:

$$\omega(M) = \{q \in \mathbb{Z}^n : \bigvee_{p \in M} : q \in \omega(p)\}$$

Für einen beliebigen Punkt $p \in M$ besteht $\omega(p) \setminus M$ per definitionem aus den beiden β -Komponenten C_p und D_p . Jeder Punkt $q \in \omega(p)$ ist β -benachbart zu beiden Komponenten. Weiterhin ist p zu diesen beiden Komponenten β -adjazent. Die Menge $\omega(q)$ besteht ebenfalls aus zwei β -Komponenten C_q und D_q , wobei wir diese beiden Komponenten konsistent mit denen in $\omega(p)$ halten können, indem C_q als diejenige Komponente wählen, die mit C_p einen Punkt gemeinsam hat. Analog sei D_q gewählt. Da C_p und C_q β -zusammenhängend sind und ihr Durchschnitt nichtleer ist, ist deren Vereinigung auch β -zusammenhängend.

Es seien nun a und b zwei beliebige Punkte aus $\omega(M) \setminus M$. Nach Definition existieren zwei Punkte p und q mit $a \in \omega(p)$ und $b \in \omega(q)$. Da M α -zusammen-

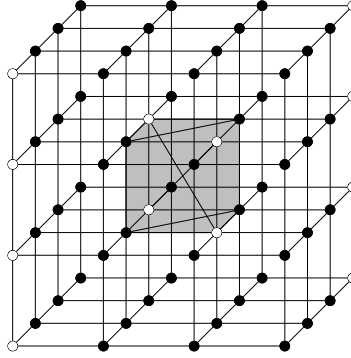


Abbildung 5.7: Die Unabhängigkeit der Eigenschaft 4 von den weiteren Eigenschaften der $(n-1)$ -Mannigfaltigkeiten. Um die anderen Eigenschaften zu erfüllen, können Adjazenzen von Punkten entsprechend hinzugefügt werden. Sie wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen. Der grau markierte 3-Kubus verletzt die Eigenschaft 4. Siehe dazu auch Abbildung 5.3.(a).

hängend ist, existiert ein α -Pfad P der Form $p = P^{(0)}, p^{(1)}, \dots, p^{(k)} = q$ in M . Dieser Pfad induziert folgende, nach obiger Betrachtung β -zusammenhängende Mengen:

$$C_P := \bigcup_{i=0}^k C_{p^{(i)}}$$

und

$$D_P := \bigcup_{i=0}^k D_{p^{(i)}}.$$

Liegen nun a und b jeweils in der selben Menge C_P bzw. D_P so sind sie β -verbunden. Liegen sie dagegen in verschiedenen Mengen so können sie nicht β -verbunden sein, da durch die Konstruktion keine β -Pfade von C_P nach D_P entstehen. \square

Auf der Basis des letzten Satzes definieren wir für eine $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{Z}^n$:

$$C_M := \bigcup \{C_P : \text{für jeden Pfad } P \text{ zwischen allen Punkten } p, q \in M\}$$

$$D_M := \bigcup \{D_P : \text{für jeden Pfad } P \text{ zwischen allen Punkten } p, q \in M\}$$

Der Begriff des einfachen Zusammenhanges wird im weiteren Text eine wichtige Rolle spielen. Durch die Wahl der Adjazenzrelation können aber verschiedene Abstufungen dieses Begriffs nötig werden. Das Konzept wurde von Herman in [6] präzisiert und soll hier genutzt werden.

Definition 5.2.2 Es seien w und w' Pfade in \mathcal{P} unter der Adjazenz α für die gilt,

$$w(0), \dots, w(l), \quad w(l+1), \dots, w(l+n-1), \quad w(l+k), \dots, w(l+k+m) \\ w'(0), \dots, w'(l), \quad w'(l+1), \dots, w'(l+k-1), \quad w'(l+n), \dots, w'(l+n+m)$$

und $w(i) = w'(i)$, für $i \in \{0, \dots, l\}$, $w(l+n+i) = w'(l+k+i)$, für $i \in \{0, \dots, m\}$. w und w' heißen **elementar N -äquivalent**, wenn gilt: $1 \leq k+n \leq N+2$.

Wir nennen im weiteren zwei Pfade w, w' in \mathcal{P} **N -äquivalent**, wenn es eine Folge w_0, \dots, w_p von α -Pfaden mit $w_0 = w$ und $w_p = w'$ gibt, so daß w_{i-1} und w_i elementar N -äquivalent sind für $i \in \{1, \dots, p\}$. Räume in denen jeder Zyklus zu einem Punkt N -äquivalent ist heißen **N -einfach zusammenhängend**.

Satz 5.2.2 Es sei $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$ ein lokal zusammenhängender Alexandroff-Raum. Dann ist \mathcal{P} unter der Adjazenzrelation A_τ ein 1-einfach zusammenhängender Raum.

Beweis. Das ist Satz 4.3.1 der Arbeit [11]. □

Nach dem Satz 4.3.1 aus [11] kann jeder einfach zusammenhängende Alexandroff-Raum als 1-einfach zusammenhängender Raum aufgefaßt werden.

Definition 5.2.3 Eine $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{Z}^n$, $n \geq 2$, heißt **$(n-1)$ -Sphäre**, wenn sie N -einfach zusammenhängend ist für eine gewisse natürliche Zahl N .

Definition 5.2.4 Ein Paar (α, β) von Adjazenzrelationen auf \mathbb{Z}^n heißt **separierendes Paar** wenn für alle $p \in \mathbb{Z}^n$ $\beta(p)$ eine $(n-1)$ -Sphäre ist.

Es würde genügen, zu fordern, daß $\beta(p)$ eine $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit ist, da sich für diese Menge stets ein N finden läßt, so daß ein N -einfacher Zusammenhang konform zur Intuition gegeben ist.

Definition 5.2.5 Eine Adjazenzrelation α auf \mathbb{Z}^n heißt **regulär**, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. Für jede Translation τ auf \mathbb{Z}^n ist $p \in \alpha(q)$ genau dann, wenn $\tau(p) \in \alpha(\tau(q))$.
2. Für jede Rotation ϱ auf \mathbb{Z}^n ist $p \in \alpha(q)$ genau dann, wenn $\varrho(p) \in \alpha(\varrho(q))$.

Definition 5.2.6 Ein Punkt $p \in \beta(z)$ $z \in \mathbb{Z}^n$ heißt unter dem zugrunde liegenden Paar (α, β) **Doppelpunkt**, wenn folgendes gilt:

Es existieren $q \in \pi(z) \cap \alpha(p)$ und $r \in \beta(z) \cap \pi(p)$ und ein einfaches $\sigma \in \mathcal{T}$ mit $\sigma(p) = q$, $\sigma(r) = z$ und $q \in \alpha(r)$.

Dieses Konzept ist der Schlüssel zur lokalen Charakterisierung der Paare (α, β) , denn es ermöglicht es erst, topologische Invarianten wie die Euler-Charakteristik definieren. Zur Bedeutung sei zusätzlich auf Abbildung 5.8 verwiesen. Man bemerke auch in welcher nahen Verwandschaft es zur Trennungseigenschaft steht.

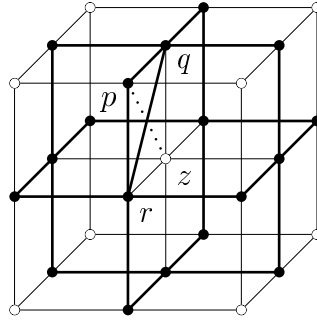


Abbildung 5.8: Ein Doppelpunkt p . Die fetten Kanten repräsentieren die α -Adjazenz. Der Übersichtlichkeit wegen sind nur die relevanten Kanten eingezeichnet. Die gepunktete Kante bezeichnet die β -Adjazenz von p und z . Die schwarzen Punkte stellen alle β -Nachbarn von z dar.

Behauptung 5.2.1 Es sei (α, β) ein separierendes Paar von regulären Adjazenzen auf \mathbb{Z}^n . Enthält $\beta(p)$ für ein beliebiges $p \in \mathbb{Z}^n$ einen Doppelpunkt, so existiert eine Menge, für die sich die Euler-Charakteristik nicht konsistent erklären läßt.

Beweis. Wir folgen in unserer Argumentation dem Abschnitt 7.5.3 in Klette und Rosenfeld [15]. Es sei $z \in \mathbb{Z}^n$ beliebig, so daß $\beta(z)$ einen Doppelpunkt p enthält. Durch z und p verläuft die Gerade $g(z, p)$, die einen Generator τ besitzt, für den $\tau(p) = z$ gilt. Es sei $p' = \tau(z)$. Es sind also p, z, p' drei

aufeinander folgende Punkte der Gerade. Aufgrund der Regularität von β ist $p' \in \beta(z)$. Dies gilt offensichtlich für die Translationsinvarianz als auch für die Rotationsinvarianz von β . Weiterhin ist p' auch ein Doppelpunkt. Im Falle der Rotationsinvarianz ist das trivialerweise klar, da die Umgebung von p in $\beta(z)$ rotiert wird. Im Falle der Translationsinvarianz folgt die Behauptung durch Vertauschen der Rollen von $\tau(z)$ und $\tau(p)$ sowie der Verschiebung der beiden Punkte q, r auf $\tau(q)$ und $\tau(r)$ in der Definition 5.2.6 des Begriffes Doppelpunkt.

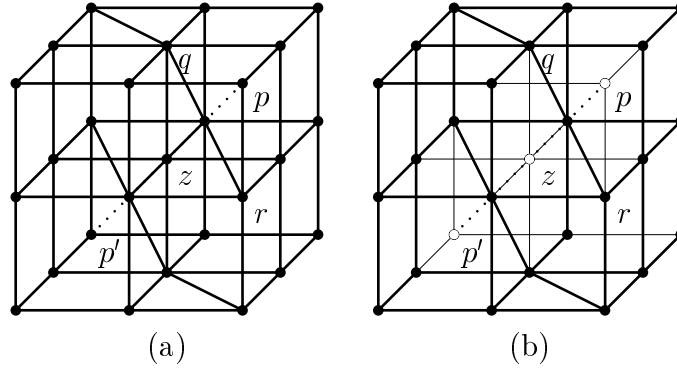


Abbildung 5.9: Für die dargestellte Menge ist die Euler-Charakteristik nicht eindeutig definierbar. Die Menge stellt außerdem ein Gegenbeispiel für die Aussage in Lemma 5.3.1.3 dar, wenn auf die Doppelpunkte verzichtet wird.

Die Menge $M := \beta(z) \cup \{z\}$ ist dann N -einfach zusammenhängend und kann durch wiederholtes Löschen einfacher Punkte auf den Punkt p reduziert werden, woraus für die Euler-Charakteristik $\chi(M) = 1$ folgt.

Die Menge $M \setminus \{z, p, p'\}$ ist anschaulich topologisch äquivalent zu einer Kreislinie. Damit sollte $\chi(M \setminus \{z, p, p'\}) = 0$ gelten.

Es sei nun E eine Ebene, die durch τ und die Translation σ zwischen etwa q und r aufgespannt wird. E enthält die Punkte p, z, p' . Die Menge $M_0 := (M \setminus \{p, z, p'\}) \cap E$ ist einfach zusammenhängend und nach Löschen einfacher Punkte ein Punkt, also $\chi(M_0) = 1$. Weiterhin seien M^+ und M^- die durch Schnitt von $M \setminus \{p, z, p'\}$ mit dem positiven bzw. negativen abgeschlossenen Halbraum an E definierten Mengen. Nach Symmetrie gilt $\chi(M^+) = \chi(M^-) = a$ und nach Summenformel für die Euler-Charakteristik gilt:

$$\chi(M \setminus \{z, p, p'\}) = \chi(M^+) + \chi(M^-) - \chi(M^+ \cap M^-) = 2a - 1 \neq 0.$$

Vergleiche dazu auch [15].

□

Definition 5.2.7 Ein separierendes Paar von regulären Adjazenzen (α, β) im \mathbb{Z}^n heißt **gutes Paar**, wenn für alle $p \in \mathbb{Z}^n$ die Menge $\beta(p)$ keine Doppelpunkte enthält.

5.3 Der Zerlegungssatz von Jordan-Brouwer

Satz 5.3.1 (Diskreter Zerlegungssatz von Jordan-Brouwer) Ist $S \subset \mathbb{Z}^n$ eine $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit $n \geq 2$, so besteht $\mathbb{Z}^n \setminus S$ aus genau zwei Wegekompenten, deren gemeinsamer Rand sie ist. \square

Dies ist eine Verallgemeinerung von Satz 4.3.1, da jede $(n-1)$ -Sphäre, eine N -einfach-zusammenhängende $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit ist. Wir nutzen zum Beweis den folgenden Satz, der eine Folgerung des unter der Nummer 3.42 im Kapitel XV des Buches von Alexandroff [2] zu findenden Satzes ist.

Satz 5.3.2 Jede $(n-1)$ -dimensionale Pseudomannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n ist orientierbar, zerlegt \mathbb{R}^n in genau zwei Wegekompenten und ist gemeinsamer Rand dieser Wegekompenten. \square

Satz 5.3.3 Für jedes gute Paar (α, β) des \mathbb{Z}^n mit $n \geq 2$ ist der Zerlegungssatz von Jordan-Brouwer erfüllt.

Wir werden den Rest dieses Kapitels benutzen, diesen Satz zu beweisen. Dazu erklären wir für ein gutes Paar (α, β) , wie aus einer beliebigen α -zusammenhängenden Menge M des \mathbb{Z}^n ein simplizialer Komplex konstruiert werden kann, dessen geometrische Realisierung im \mathbb{R}^n die gleichen topologischen Eigenschaften hat wie M .

Am Anfang steht folgende Konstruktion:

Für eine Adjazenzrelation α und beliebige Punkte $p, q \in \mathbb{Z}^n$ sei

$$(p, q)_\alpha := \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda p + (1 - \lambda)q, \lambda \in (0, 1)\} & p \in \alpha(q) \\ \emptyset & p \notin \alpha(q) \end{cases}$$

$$[p, q]_\alpha := \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda p + (1 - \lambda)q, \lambda \in [0, 1]\} & p \in \alpha(q) \\ \emptyset & p \notin \alpha(q) \end{cases}$$

Es sei nun $M \subset C^n \subset \mathbb{Z}^n$ eine beliebige α -zusammenhängende Menge. (α, β) sei ein gutes Paar. Ziel ist es, einen simplizialen Komplex $K_{(\alpha, \beta)}(M) = K(M)$ zu konstruieren.

Für einen k -Kubus $C = C^k$ mit den Ecken c_1, c_2, \dots, c_{2^k} sei

$$\hat{c} = \sum_{i=1}^{2^k} \frac{c_i}{2^k}$$

das **Baryzentrum** von $C = C^k$.

Weiterhin sei für jeden Unterkubus $C \subset M$ der Test $T(C)$ genau dann wahr, wenn gilt

$$\bigvee_{p,q \in C} (\hat{c} \in (p, q)_\alpha \wedge p, q \in M) \vee (\hat{c} \notin (p, q)_\beta \wedge \hat{c} \in (p, q) \wedge p, q \in M^C)$$

Das heißt, der Test wird wahr, wenn die Strecke zwischen zwei α -verbundenen Punkten aus M das Baryzentrum schneidet und wenn die Strecke zwischen zwei Punkten aus M^C das Baryzentrum zwar schneidet, die Punkte aber nicht β -verbunden sind, oder wenn der Kubus C ganz in M liegt.

Besteht $M \subset C^n \subset \mathbb{Z}^n$ aus mehreren α -Zusammenhangskomponenten, so wird $K(M)$ komponentenweise aufgebaut.

Der Komplex $K(M)$ für $M \subset C^n$ wird induktiv aufgebaut. Wir beginnen mit den Ecken

$$K^0(M) := M \cup \{\hat{c} : C \subset M \text{ und } T(C) \text{ ist wahr}\}$$

Sind die Simplizes der Dimension $i - 1$ bereits definiert, so lassen sich die i -Simplizes für $C \subset C^n$ konstruieren.

$$K^i(M) := \{(x_0, \dots, x_{i-1}, \hat{c}) : (x_0, \dots, x_{i-1}) \in K^{i-1}(M) \cap C \text{ und } T(C) \text{ wahr}\}$$

Das heißt wir nehmen die Baryzentren aller Unterkuben C von C^n und bauen mit allen $(i - 1)$ -Simplizes, die von C schon bekannt sind die i -Simplizes auf, falls der Test $T(C)$ gelingt.

Der Komplex $K(M)$ ist nun die Vereinigung aller $K^i(M)$.

Behauptung 5.3.1 $K(M)$ ist für ein Paar (α, β) und eine Menge $M \subset C \subset \mathbb{Z}^n$ ein Simplicialkomplex.

Beweis. Wir überprüfen die Definition 4.1.12. Zum Beweis der Eigenschaft, daß jede Seite σ' eines Simplex $\sigma = (x_0, \dots, x_i)$ aus $K(M)$ wieder in $K(M)$ liegt, beobachten wir, daß σ in $K^i(M)$ liegt. Für $i = 0$ hat σ keine echten Seiten und die Eigenschaft ist bewiesen. Es sei also $i > 0$. Dann sei

für alle $j \in \{0, \dots, i\}$ $\sigma_j = (x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_i)$ dasjenige Simplex, das durch Weglassen der j -ten Ecke aus σ entsteht.

Für $j = i$ ist nach Konstruktion von K^i das Simplex σ_j ein Element aus K^{i-1} , und liegt somit in K .

Für $j < i$ ist $(x_0, \dots, x_j - 1)$ ein Simplex aus K^{j-1} und eine Seite von σ_j . Dann liegt $(x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1})$ nach Konstruktion in K^j . Nach Induktion liegt $(x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_i)$ in K^{i-1} .

Zum Beweis der Disjunktheit zweier verschiedener Simplizes $\sigma, \tau \in K(M)$ seien $\sigma = (x_0, \dots, x_k)$ und $\tau = (y_0, \dots, y_j)$. Zuerst betrachten wir den Fall $\{x_0, \dots, x_k\} \cap \{y_0, \dots, y_j\} = \emptyset$. Dann muß auch $\sigma \cap \tau$ leer sein. Wir beweisen induktiv über k .

Für $k = 0$ ist die Behauptung offensichtlich erfüllt. Es sei also $k > 0$ und die Aussage für alle kleineren Teilmengen von $\{x_0, \dots, x_k\}$ bewiesen. σ entsteht aus einem $k - 1$ -Simplex durch Anfügen des Baryzentrums eines Unterkubus von C^n . Dieses ist nach Voraussetzung keine Ecke von τ . Nach Induktionsvoraussetzung ist $(x_{i_0}, \dots, x_{i_{k-1}}) \cap \tau = \emptyset$ für $i_0, \dots, i_{k-1} \in \{0, \dots, k\}$. Dies sind gerade die Ränder von σ . Damit kann aber auch nicht $\sigma \cap \tau = \emptyset$ gelten.

Gilt nun $\{x_0, \dots, x_k\} \cap \{y_0, \dots, y_j\} = \{p_0, \dots, p_i\}$ so ist $\varrho = (p_0, \dots, p_i)$ eine gemeinsame echte Seite von σ und τ .

Keine der Ecken von τ kann im Inneren von σ liegen und umgekehrt, da Simplizes durch sukzessives Anfügen von Baryzentren gebildet werden und ein solcher innerer Punkt entweder kein Baryzentrum (bzw. Eckpunkt als Spezialfall) ist oder σ nicht korrekt gebildet worden wäre. Weiterhin kann keine Kante von τ durch das Innere von σ verlaufen, da dies der Konstruktion von σ oder von τ widerspräche: Es wäre eine der Ecken kein Baryzentrum eines Unterkubus von C^n \square

Nun sei M eine endliche α -zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{Z}^n unter dem Paar (α, β) . Es läßt sich M durch endlich viele n -Kuben C_1^n, \dots, C_l^n überdecken. Wir definieren

$$K(M) := \bigcup_{i=1}^l K(C_i^n \cap M).$$

Behauptung 5.3.2 $K(M)$ ist für eine beliebige endliche Menge $M \subset \mathbb{Z}^n$ ein simplizialer Komplex.

Beweis. Beide Eigenschaften folgen aus dem Beweis der letzten Behauptung. Es sei zuerst σ ein Simplex aus $K(M)$. Dann liegt σ in einem $K(C_i^n \cap M)$. In diesem Simplicialkomplex liegen auch alle Seiten von σ , die damit wiederum in $K(M)$ liegen.

Zum Beweis der zweiten Eigenschaft seien σ und τ zwei ungleiche Simplizes aus $K(M)$. Liegen beide in verschiedenen $K(C_i^n \cap M)$, haben sie notwendigerweise einen nichtleeren Schnitt. Andernfalls wenden wir die Behauptung 5.3.1 an. \square

Ist M nicht α -zusammenhängend aber endlich, so läßt sich $K(M)$ komponentenweise konstruieren.

Im weiteren bezeichnet $|K(M)|$ die geometrische Realisierung von $K(M)$ (siehe Definition 4.1.13).

Lemma 5.3.1 *Es sei $M \subset \mathbb{Z}^n$ eine Menge unter dem Paar (α, β) . Dann gilt:*

1.

$$M = \mathbb{Z}^n \cap |K(M)|,$$

$$M^C = \mathbb{Z}^n \cap |K(M)|^C$$

2. *Zwei Punkte $p, q \in M$ liegen genau dann in derselben α -Komponente von M , wenn sie in derselben Wegekomponeute von $|K(M)|$ liegen.*

3. *Zwei Punkte $p, q \in M^C$ liegen genau dann in derselben β -Komponente von M^C , wenn sie in derselben Wegekomponeute von $|K(M)|^C$ liegen und (α, β) keine Doppelpunkte besitzt.*

4. *Der Rand einer Komponente $A \subset |K(M)|$ trifft genau dann den Rand einer Komponente $B \subset |K(M)|^C$, wenn ein Punkt in $A \cap \mathbb{Z}^n$ existiert, der zu einem Punkt in $B \cap \mathbb{Z}^n$ β -adjazent ist.*

Beweis. 1. Zum Beweis der ersten Aussage beobachten wir, daß ein Punkt p genau dann in M liegt, wenn er eine Ecke von $K(M)$ ist und ein Punkt aus \mathbb{Z}^n . Das ist genau dann der Fall, wenn p in $|K(M)| \cap \mathbb{Z}^n$ liegt. Die zweite Gleichung wird analog bewiesen.

2. (\Rightarrow) Es seien p, q Punkte einer α -Komponente von M . Dann existiert ein α -Pfad $p = p_0, p_1, \dots, p_k = q$, für den gilt, daß $[p_i, p_{i+1}]_\alpha$ für alle $i \in$

$\{1, \dots, k-1\}$ ganz in $|K(M)|$ liegt. Damit existiert ein stückweise linearer Weg.

(\Leftarrow) Es seien p, q zwei Punkte derselben Wegekomponeute von $|K(M)|$. Dann existiert ein Weg $w : [0, 1] \rightarrow |K(M)|$ mit $w(0) = p$ und $w(1) = q$. Es seien $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ die Simplizes, die von w getroffen werden. Es kann jeder Punkt des Weges w , der in einem Simplex σ_i liegt, durch eine lineare Homotopie auf den Rand $\bar{\sigma}_i \setminus \sigma_i$ abgebildet werden. Um die Stetigkeit dieser Abbildung zu gewährleisten, sei auf den (endlich vielen) Ecken von $K(M)$ eine Ordnung definiert, die wiederum Ordnungen auf allen Simplizes von $K(M)$ induziert. Ein Punkt auf dem Wege w wird dann stets auf diejenige $(k-1)$ -Seite seines k -Trägersimplex σ_i der Folge projiziert, die bezüglich der genannten Ordnung minimal ist. Nach einer endlichen Anzahl dieser homotopen Transformationen ist der Weg w überführt in einen Weg, der nur durch Ecken und Kanten von $K(M)$ verläuft. Durch die Punkte dieses Weges, die in \mathbb{Z}^n liegen, läßt sich der α -Weg nun stückweise definieren.

3. Der Beweis verläuft völlig analog zu 2. Allerdings gelten beide Richtungen im Allgemeinen nicht für Paare mit Doppelpunkten. Es seien p, q, s, t wie in Definition 5.2.6, wobei $p, q \in M$, $s, t \in M^C$ in zwei verschiedenen Wegekomponeuten von $|K(M)|^C$ liegen, $p \in \alpha(q)$ und $s \in \beta(t)$. Dann liegt der Punkt $x = [p, q]_\alpha \cap [s, t]_\beta$ in $K(M)$ nach Konstruktion und damit auch in $|K(M)|$.

4. Es seien $A \subset |K(M)|$ und $B \subset |K(M)|^C$ zwei Wege-Komponeuten.

(\Rightarrow) Der Schnitt der Ränder von A und B enthalte einen Punkt x . Der Punkt x liegt in einem k -Simplex von $K(M)$, welches wiederum einen Eckpunkt in einem Kubus C^n hat, der sowohl A als auch B schneidet. Damit existieren Punkte $p, q \in C^n \cap \mathbb{Z}^n$ mit $p \in A \cap \mathbb{Z}^n \subset M$ und $q \in B \cap \mathbb{Z}^n \subset M^C$. In C^n existiert ein π -Weg von p nach q . Daher müssen auf diesem Weg zwei β -Nachbarn existieren, von denen einer in $A \cap \mathbb{Z}^n$, der andere in $B \cap \mathbb{Z}^n$ liegt.

(\Leftarrow) Es existiere ein β -Pfad von $p \in A \cap \mathbb{Z}^n$ nach $q \in B \cap \mathbb{Z}^n$. Dieser kann durch zusätzliches Einfügen von Punkten zu einem π -Pfad gemacht werden. Es existieren zwei π -Nachbarn $p' \in A$ und $q' \in B$ in \mathbb{Z}^n . Dann muß nach Konstruktion von $K(M)$ der Punkt p' ein Punkt im simplizialen Rand von $K(M)$ sein, also auch im Schnitt der Ränder von A und B liegen. \square

Wir werden nun diese Konstruktion auf digitale $(n-1)$ -Mannigfaltigkeiten anwenden. Unser Ziel dabei ist, eine kombinatorische $(n-1)$ -Pseudomannigfaltigkeit zu erhalten (siehe Definition 4.1.14), von der bekannt ist, daß sie den Jordan-Brouwerschen Satz erfüllt.

Im weiteren sei M eine digitale $(n - 1)$ -Mannigfaltigkeit. Das erste zu lösende Problem ist, daß $K(M)$ nach obiger Konstruktion nicht homogen $(n - 1)$ -dimensional sein muß, da durch die Konstruktion n -Simplizes entstehen können.

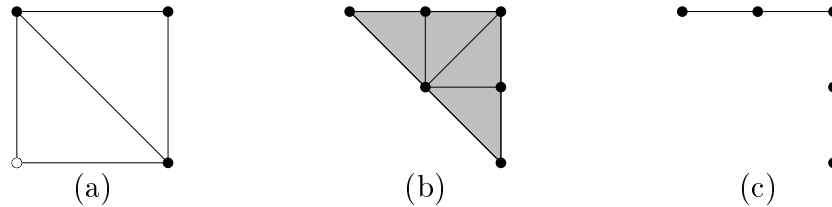


Abbildung 5.10: Erstellen des Komplexes $K'(M)$. Bild (a) zeigt einen 2-Kubus C mit den zugehörigen Adjazenzen. Die schwarzen Punkte bilden die Menge M . Aus diesen Punkten wird in (b) der Komplex $K(M)$ aufgebaut. Dieser Komplex kann aber 2-Simplizes enthalten. Diese sind grau dargestellt. Daher werden in einem weiteren Schritt (c) diese 2-Simplizes auf ihren Rand projiziert.

Die Lösung ist, einen Deformationsretrakt von $|K(M)|$ zu finden, in dem keine n -Simplizes mehr vorhanden sind. Dazu entfernen wir in $K(M)$ alle Ecken, die Baryzentren von Kuben C sind, für die $C \setminus M$ genau eine β -Zusammenhangskomponente besitzt. Weiterhin werden alle Simplizes entfernt, die eine solche Ecke besitzen. Der resultierende Komplex heiße $K'(M)$.

Satz 5.3.4 $K'(M)$ ist die Triangulation eines starken Deformationsretraktes von $K(M)$.

Beweis. Wir beweisen zuerst folgendes Lemma:

Lemma 5.3.2 Es sei σ ein k -Simplex und x eine beliebige Ecke aus $K(\sigma)$. Dann ist $|K(\sigma \setminus \{x\})|$ ein starker Deformationsretrakt von $|K(\sigma)|$

Beweis. Wir geben eine lineare Homotopie von $|K(\sigma)|$ auf $|K(\sigma \setminus \{x\})|$ an. Für $y \in |K(\sigma)| \setminus \{x\}$ sei z derjenige Punkt auf dem Strahl $xy \subset \mathbb{R}^n$, der in $\partial|K(\sigma)|$ liegt. Dann ist

$$f(y, t) = tz + (1 - t)y$$

eine lineare Homotopie zwischen den angegebenen Mengen.

$K(\sigma \setminus \{x\})$ ist ein simplizialer Komplex und nach Existenz von f ist $|K(\sigma \setminus \{x\})|$ ein starker Deformationsretrakt von $|K(\sigma)|$. \square

Es sei nun f_σ die oben definierte Homotopie für jedes $\sigma \in K(M)$ das x als Ecke besitzt. Dann induziert das Entfernen der Ecke σ aus $K(M)$ die folgende lineare Homotopie:

$$f(y, t) = \begin{cases} f_\sigma(y, t) & \text{Es existiert ein } \sigma, \text{ das } y \text{ enthält und } x \text{ als Ecke hat} \\ y & \text{sonst} \end{cases}$$

Es werden nur endlich viele Punkte aus M entfernt. Wir können also die Konstruktion als endliche Folge von Anwendungen der beschriebenen Homotopien betrachten. Damit ist $K'(M)$ Triangulierung eines starken Deformationsretraktes von $K(M)$. \square

Lemma 5.3.3 *Für alle n -Kuben $C \subset \omega(M) \subset \mathbb{Z}^n$, $n \geq 2$ besitzt $C \setminus M$ jeweils höchstens eine β -Komponente in C_M bzw. D_M .*

Beweis. M ist eine digitale $(n - 1)$ -Mannigfaltigkeit. Damit gilt für alle $p \in M$: $\omega(p) \setminus M$ hat genau zwei β -Zusammenhangskomponenten C_p und D_p (Eigenschaft 2).

Wir nehmen an $C \setminus M$ hat zwei β -Zusammenhangskomponenten K_1 und K_2 in C_M .

Für alle $p \in C \cap M$ liegen K_1 und K_2 in C_p und alle β -Pfade zwischen K_1 und K_2 verlaufen außerhalb von C .

Es existieren nach Behauptung 5.1.3 in $C \cap M$ mindestens n Punkte, da $C \setminus M$ mindestens zwei β -Komponenten besitzt. Diese seien p_1, \dots, p_n .

Es sei C' ein $(n - 2)$ -Unterkubus von C , so daß $C' \cap M$ maximal ist. Dann existieren zwei Translationen τ_1 und τ_2 mit

$$C = C' \cup \tau_1(C') \cup \tau_2(C') \cup \tau_1\tau_2(C')$$

Nun kann nicht für jede mögliche Wahl von C' gelten

$$\bigwedge_{p \in C'} ((\tau_1(p) \in \tau_1(C') \setminus M \vee \tau_2(p) \in \tau_2(C') \setminus M) \Rightarrow \tau_1\tau_2(p) \in \tau_1\tau_2(C') \setminus M),$$

da sonst $C \setminus M$ nur eine β -Komponenten enthielte, K_1 und K_2 aber zwei verschiedene Komponenten dieser Menge sind. Da $C \cup M$ nach Eigenschaft 1 von M α -zusammenhängend ist, folgt ein Widerspruch zur Trennungseigenschaft. \square

Dieses ist die einzige Aussage über digitale $(n - 1)$ -Mannigfaltigkeiten, die die Eigenschaft 1 benutzt. Es ist eine zentrale Behauptung, da insbesondere die nächste Folgerung immer wieder Anwendung finden wird. Möglicherweise kann man aber diese Behauptung auch ohne die Eigenschaft 1 nachweisen und damit den Begriff der $(n - 1)$ -Mannigfaltigkeit ausweiten.

Folgerung 5.3.1 *Jeder k -Kubus C , $k \in \{0, \dots, n\}$, mit $C \cap M \neq \emptyset$ hat maximal zwei β -Komponenten in $C \setminus M$.*

Beweis. Dies folgt aus Lemma 5.3.3 und dem Lemma 5.1.1. \square

Lemma 5.3.4 *Es sei $M \subset \mathbb{Z}^n$, $N \geq 2$, eine digitale $(n - 1)$ -Mannigfaltigkeit unter dem Paar (α, β) . Dann ist in jeder nach Inklusion aufsteigend geordneten Folge von Kuben C^0, \dots, C^n die Zahl der β -Komponenten von $C^i \setminus M$ um höchstens 1 kleiner als in $C^{i+1} \setminus M$ für alle $i \in \{0, \dots, n - 1\}$.*

Beweis. Die Behauptung gilt offensichtlich für n -Kuben, die keinen Punkt mit M gemeinsam haben. Für den anderen Fall gilt nach Folgerung 5.3.1, daß der letzte Kubus einer beliebigen Folge C^0, \dots, C^n höchstens zwei β -Komponenten in M^C besitzt. Es sei C^0, \dots, C^n eine aufsteigend inklusionsgeordnete Folge von Kuben, in der ein Kubus C^j existiert, so daß $C^{j+1} \setminus M$ zwei β -Komponenten mehr hat als $C^j \setminus M$. Es gibt dann eine Translation τ_1 , so daß $C^{j+1} = C^j \cup \tau(C^j)$ ist. Weiterhin gibt es einen $(j - 1)$ -Unterkubus C^{j-1} von C^j mit

$$C^{j+1} = C^{j-1} \cup \tau_1(C^{j-1}) \cup \tau_2(C^{j-1}) \cup \tau_1\tau_2(C^{j-1})$$

für ein passendes τ_2 . Dann liegen die Punkte der zwei β -Komponenten von $C^{j-1} \setminus M$ in $\tau_1(C^{j-1})$ und $\tau_1\tau_2(C^{j-1})$. Es kann aber nicht für alle möglichen Wahlen von C^{j-1} einen Punkt p einer β -Komponente von $\tau_1(C^{j-1}) \setminus M$ geben, so daß $\tau_2(p)$ in $\tau_1\tau_2(C^{j-1})$ liegt, da es sonst keine 2 β -Komponenten in C^{j+1} gäbe. Dies ist ein Widerspruch zur Eigenschaft 4 von M .

Es kann weiterhin die Zahl der β -Komponenten eines $C^j \setminus M$ in einer solchen Folge nicht größer sein als die eines $C^{j+1} \setminus M$. Denn dann liegen in C^j mindestens zwei β -Komponenten in M^C . Dieser Zusammenhang sollte induktiv aus der Eigenschaft 4 von M folgen. Ein vollständiger Beweis ist dem Autor zur Zeit aber nicht bekannt. \square

Behauptung 5.3.3 *Für jede digitale $(n - 1)$ -Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{Z}^n$ und jeden n -Kubus C gilt $|C \setminus M| \geq 1$.*

Beweis. Die Behauptung ist offensichtlich wahr für $C \cap M = \emptyset$.

Ansonsten nehmen wir an, es sei $C \subset M$. Nun gilt für alle $p \in C$, daß $M \setminus p$ α -zusammenhängend ist, da alle Unterkuben von $C \setminus \{p\}$ π -zusammenhängend sind.

Es sei nun p ein beliebiger Punkt aus C . Nach Eigenschaft 3 der $(n - 1)$ -Mannigfaltigkeit M müssen n π -Nachbarn zu C_p und D_p adjazent sein. Diese heißen p_1, \dots, p_n .

Es seien τ_1, \dots, τ_n die Generatoren von \mathbb{Z}^n mit $\tau_i(p) = p_i$ und C_1, \dots, C_n die $(n - 1)$ -Kuben mit $C_i \cap C = \emptyset$ und $\tau_i(C_i) \subset C$. Einer dieser Kuben C_i muß zwei β -Zusammenhangskomponenten in M^C besitzen, da alle Punkte p_i aus C zu C_p und D_p β -adjazent sind. Im Fall $n = 2$ ist anschaulich klar, daß kein solches C_i existieren kann.

O.B.d.A. sei nun C_n dieser Kubus. In C_i existiert ein Punkt aus M . Dieser ist β -adjazent zu $\tau_i(C_i) \subset C$ und $\tau_i(C_i) \cup C_i$ ist ein n -Kubus. Wir konstruieren nun eine aufsteigende, inklusionsgeordnete Folge von Kuben:

$$C^0 = \{p\}, C^1 = \{p, \tau_1(p)\}, C^{i+1} = C^i \cup \tau_{i+1}(C^i), C^n = \tau_n^{-1}(C^{n-1})$$

Es liegen nun die Kuben C^0, \dots, C^{n-1} ganz in M , der Kubus C_n aber besitzt 2 β -Zusammenhangskomponenten in M^C .

Dies ist nach Lemma 5.3.4 nicht möglich. Damit kann der Fall, daß ein n -Kubus ganz in M liegt nicht eintreten. \square

Lemma 5.3.5 *Es sei $M \subset \mathbb{Z}^n$ eine $(n - 1)$ -Mannigfaltigkeit. Dann gilt für jeden k -Kubus $C \subset M$ mit $0 \leq k < n$, daß*

$$\bigcap_{p \in C} \omega(p) \setminus M$$

zwei β -Zusammenhangskomponenten besitzt. Diese liegen in C_p und D_p für alle $p \in C$.

Beweis. Induktion über k .

Für $k = 0$ folgt das Resultat aus Eigenschaft 1 der $(n - 1)$ -Mannigfaltigkeit M .

Im Fall $k > 0$ sei $C = C' \cup \tau(C') \subset M$ ein k -Kubus für eine geeignete Translation τ . Die $(k-1)$ -Kuben C' und $\tau(C')$ erfüllen die Induktionsvoraussetzung. Es haben also

$$\bigcap_{p \in C'} \omega(p) \setminus M$$

und

$$\bigcap_{p \in \tau(C')} \omega(p) \setminus M$$

zwei β -Zusammenhangskomponenten.

Es liegen nun in $\tau(C')$ π -Nachbarn q der Punkte p in C' . Diese besitzen nach Eigenschaft 2 von M β -Nachbarn in $\omega(p) \setminus M$ und damit auch in $\bigcap_{p \in C'} \omega(p) \setminus M$. Umgekehrt gilt das Gleiche. Demnach müssen in der Menge

$$\bigcap_{p \in C'} \omega(p) \cap \bigcap_{p \in \tau(C')} \omega(p)$$

n -Kuben liegen, in denen Punkte von M^C liegen, die zu C_p bzw. D_p für alle $p \in C$ gehören und in den jeweiligen β -Komponenten β -verbunden sind.

Da kein n -Kubus ganz in einer $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit liegen kann, gilt die Behauptung höchstens für $(n-1)$ -Kuben. Damit besitzt

$$\bigcap_{p \in C} \omega(p) \setminus M$$

die behauptete Eigenschaft. □

Behauptung 5.3.4 *Für eine $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{Z}^n$ enthält der Komplex $K'(M)$ keine n -Simplizes.*

Beweis. Keiner der n -Kuben C^n , die einen Punkt aus M enthalten, liegt ganz in M . Damit existiert in jeder nach Inklusion geordneten, aufsteigenden Folge von Kuben C^0, \dots, C^n mindestens ein Kubus, der in M^C genau eine β -Zusammenhangskomponente besitzt. Dieser ist entweder C^n selbst, oder einer seiner Unterkuben, der nach Eigenschaft 4 der $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit garantiert wird, wenn C^0 ganz in M liegt. Da dessen Baryzentrum in $K'(M)$ nicht auftritt, kann in C^n kein n -Simplex liegen, der auch in $K'(M)$ vorkommt. □

5.4 Der Beweis des Zerlegungssatzes für digitale Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt werden wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 5.4.1 *Es sei $M \subset \mathbb{Z}^n$ eine digitale $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit unter dem doppelpunktfreien Paar (α, β) . Dann ist $K'(M)$ eine $(n-1)$ -Pseudomannigfaltigkeit. \square*

Dazu weisen wir die drei Eigenschaften einer $(n-1)$ -Pseudomannigfaltigkeit nach. Die einzelnen Beweise erfolgen in den nachstehenden Lemmata 5.4.1, 5.4.2 und 5.4.3.

5.4.1 Die Homogenität

Lemma 5.4.1 *Für jede digitale $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{Z}^n$ unter einem guten Paar (α, β) ist $K'(M)$ homogen $(n-1)$ -dimensional.*

Beweis. Es sei σ ein beliebiger k -Simplex aus $K'(M)$. Der Beweis ist induktiv über $i = (n-1) - k$. Nach Behauptung 5.3.4 können keine n -Simplizes auftreten.

$i = 0$. In diesem Fall ist σ ein $(n-1)$ -Simplex und seine eigene Seite. Die Behauptung stimmt also.

$i > 0$. Das Simplex σ liegt in einem Kubus C minimaler Dimension. Dieser sei der Kubus dessen Baryzentrum in der Konstruktion von $K(M)$ als letzter zu σ hinzugefügt und dessen Baryzentrum beim Übergang zu $K'(M)$ nicht aus $K(M)$ entfernt wurde.

Wir zeigen, daß ein Kubus C^* existiert, der C als Unterkubus besitzt, oder Unterkubus von C ist, und dessen Baryzentrum x in $K'(M)$ liegt, aber keine Ecke von σ ist. Der Punkt x und das Simplex σ definieren dann ein $(k+1)$ -Simplex, das σ als Seite hat und nach Induktionsvoraussetzung selbst Seite eines $(n-1)$ -Simplizes ist. Aufgrund der Transitivität der Seitenrelation ist die Behauptung dann bewiesen.

1. Fall: σ hat keinen Eckpunkt mit C gemeinsam. Dann sind alle Ecken von σ Baryzentren gewisser l -Unterkuben C^l von C mit $0 < l \leq \dim(C)$. Die Ecken von σ liegen alle in $K'(M)$, damit sind die Tests $T(C^l)$ für $0 < l \leq \dim(C)$

wahr. Weiterhin existiert ein C^l , das eine Ecke in M besitzt, da ansonsten alle C^l ganz in M^C lägen.

Dann gibt es einen Punkt x aus M der Baryzentrum eines 0-Kubus C^* ist und mit σ zu einem $(k+1)$ -Simplex verbunden werden kann.

2. Fall: σ hat eine Ecke mit C gemeinsam.

2.1. Fall: Die Dimension $\dim(C) = k'$ ist größer als k . Nach Wahl von C liegt dessen Baryzentrum in $K'(M)$ und ist eine Ecke von σ .

2.1.1. Fall: Ist $C \subset M$ so existiert eine aufsteigende Folge von Kuben

$$C^0, \dots, C^{k'} = C,$$

deren Baryzentren die Ecken von σ bilden. Diese Kuben sind nach Inklusion geordnet, damit folgt, daß sie alle in M liegen. Wegen $k' \geq k+1$ gibt es in dieser Folge zwei aufeinanderfolgende Kuben C^i, C^j mit $j > i+1$. Es läßt sich nun ein $(i+1)$ -Kubus C^* finden, der C^i enthält und der in C^j enthalten ist. C^* liegt auch in M , daher ist sein Baryzentrum x in $K'(M)$. Aus x und σ kann nun ein $(k+1)$ -Simplex erzeugt werden.

2.1.2. Fall: Besitzt $C \setminus M$ zwei β -Zusammenhangskomponenten, so liegen die Kuben der Folge $F = C^0, \dots, C^{k'} = C$ nicht alle ganz in M . Wegen Lemma 5.3.4 zerfällt F in zwei Teilfolgen:

$$C^0, \dots, C^m$$

sei die Teilfolge der Kuben von F , die ganz in M liegen und

$$C^{m'}, \dots, C^{k'}$$

sei die Teilfolge der Kuben von F , die in M^C zwei β -Komponenten besitzen.

Nach Lemma 5.1.1 ist $m < m'$ und die Dimensionen der ersten Folge sind allesamt höchstens m und die der zweiten Folge mindestens m' .

2.1.2.1. Fall: Gibt es in einer dieser beiden Folgen zwei aufeinanderfolgende Kuben C^i, C^j mit $j < i+1$, so existiert ein Kubus C^* , der C^i enthält und in C^j enthalten ist und die gleiche Eigenschaft wie C^i und C^j hat. Das Baryzentrum x des Kubus C^* liegt dann in $K'(M)$ und bildet mit σ den $(k+1)$ -Simplex.

2.1.2.2. Fall: Tritt keiner dieser günstigen Fälle ein, so existiert für den Fall $k' < n$ ein $(k'+1)$ -Kubus C^* , der nach Lemma 5.1.1 und Lemma 5.3.3 nur zwei β -Komponenten in M^C besitzt. Dessen Baryzentrum x liegt in $K'(M)$ und wird mit σ zu einem $(k+1)$ -Simplex.

Es sei also $k' = n$. Gesucht ist ein Kubus C^* der C^m enthält und in $C^{m'}$ enthalten ist, und entweder keine oder zwei β -Komponenten in M^C hat. Wir nehmen an, ein solcher Kubus existiert nicht. Dann gilt für alle Folgen von Kuben

$$C^{m+1}, \dots, C^{m'-1}$$

die zwischen C^m und $C^{m'}$ liegen, daß ihre Elemente genau eine β -Zusammenhangskomponente in M^C besitzen.

Weil $\dim(\sigma) \neq n - 1$ und C^0, \dots, C^n die Folge der Kuben ist, deren Baryzentren die Ecken von σ bilden, müssen $m + 1$ und $m' - 1$ verschieden sein. Jede Folge $C^{m+1}, \dots, C^{m'-1}$ hat also 2 Glieder.

Es seien

$$\mathcal{C}^{m+1} := \{C^{m+1} : C^{m+1} = C^m \cup \tau(C^m) \wedge \tau \text{ ist kein Generator von } C^m\}$$

die Menge aller $(m + 1)$ -Kuben, die C^m enthalten und

$$\mathcal{C}^{m+2} := \left\{ C^{m+2} : \begin{array}{l} C^{m+2} = C^m \cup \tau_1(C^m) \cup \tau_2(C^m) \cup \tau_1\tau_2(C^m) \\ \text{und } \tau_1 \neq \tau_2 \text{ sind keine Generatoren von } C^{m+1} \end{array} \right\}$$

die Menge aller $(m + 2)$ -Kuben, die C^m enthalten.

Wir wählen ein $C' \in \mathcal{C}^{m+1}$. Dann ist $C' = C^m \cup \tau(C^m)$ und der m -Kubus $\tau(C^m)$ enthält mindestens einen Punkt aus M^C , da $C^m \subset M$ und C' nach Annahme genau eine β -Zusammenhangskomponente in M^C besitzt.

Die Kuben C'' aus \mathcal{C}^{m+2} haben nach Aufbau zwei Unterkuben in C^{m+1} , nämlich $C^m \cup \tau_1(C^m)$ und $C^m \cup \tau_2(C^m)$, für die gilt, daß $\tau_1(C^m)$ und $\tau_2(C^m)$ je mindestens einen Punkt in M^C besitzen. Diese gehören zu einer β -Komponente in C'' . Da M die Trennungseigenschaft erfüllt und $C^m \subset M$ ist, muß für den m -Unterkubus $\tau_1\tau_2(C^m)$ von C'' gelten:

$$(\tau_1\tau_2)^{-1}(\tau_1\tau_2((C^m) \cap M)) \subset (\tau_1^{-1}(\tau_1(C^m) \cap M)) \cap (\tau_2^{-1}(\tau_2(C^m) \cap M)).$$

Die analoge Aussage gilt für $\tau_1\tau_3(C^m)$ und $\tau_2\tau_3(C^m)$. Es besitzt also $C^{m+2} \setminus M$ nur eine β -Komponente.

Nun sei C''' ein $(m + 3)$ -Kubus der C^m enthält. C''' kann keine zwei β -Komponenten in M^C besitzen, denn C''' hat mit paarweise verschiedenen τ_1, τ_2, τ_3 , die keine Generatoren von C^m sind, folgenden Aufbau

$$\begin{aligned} C''' &= C^m \cup \tau_1(C^m) \cup \tau_2(C^m) \cup \tau_3(C^m) \cup \\ &\quad \cup \tau_1\tau_2(C^m) \cup \tau_1\tau_3(C^m) \cup \tau_2\tau_3(C^m) \cup \\ &\quad \cup \tau_1\tau_2\tau_3(C^m). \end{aligned}$$

und es gilt wegen der Trennungseigenschaft

$$\begin{aligned} (\tau_1 \tau_2 \tau_3)^{-1}(\tau_1 \tau_2 \tau_3((C^m) \cap M) \subset \\ ((\tau_1 \tau_2)^{-1}(\tau_1 \tau_2(C^m) \cap M)) \cap ((\tau_2 \tau_3)^{-1}(\tau_2 \tau_3(C^m) \cap M)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (\tau_1 \tau_2 \tau_3)^{-1}(\tau_1 \tau_2 \tau_3((C^m) \cap M) \subset \\ ((\tau_1 \tau_3)^{-1}(\tau_1 \tau_3(C^m) \cap M)) \cap ((\tau_2 \tau_3)^{-1}(\tau_2 \tau_3(C^m) \cap M)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (\tau_1 \tau_2 \tau_3)^{-1}(\tau_1 \tau_2 \tau_3((C^m) \cap M) \subset \\ ((\tau_1 \tau_2)^{-1}(\tau_1 \tau_2(C^m) \cap M)) \cap ((\tau_1 \tau_3)^{-1}(\tau_1 \tau_3(C^m) \cap M)). \end{aligned}$$

Zusammengesetzt liefern diese Beobachtungen folgende Aussage: Einer der Kuben $C^m \cup \tau_i(C^m)$, $i = 1, 2, 3$ sei maximal. O.B.d.A sei das der mit $i = 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (\tau_2 \tau_3)^{-1}(\tau_2 \tau_3(C^m \cup \tau_1(C^m)) \cap M) \\ = (\tau_2 \tau_3)^{-1}(\tau_2 \tau_3(C^m) \cap M) \cup (\tau_2 \tau_3)^{-1}(\tau_2 \tau_3 \tau_1(C^m) \cap M) \\ \subset \tau_2^{-1}(\tau_2(C^m) \cap M) \cap \tau_3^{-1}(\tau_3(C^m) \cap M) \\ \cup \tau_2^{-1}(\tau_2 \tau_1(C^m) \cap M) \cap \tau_3^{-1}(\tau_3 \tau_1(C^m) \cap M) \\ = \tau_2^{-1}(\tau_2(C^m \cup \tau_1(C^m)) \cap M) \cap \tau_3^{-1}(\tau_3(C^m \cup \tau_1(C^m)) \cap M) \end{aligned}$$

Das heißt, daß $C''' \setminus M$ nur eine β -Komponente besitzt, wenn M die Trennungseigenschaft erfüllt und alle Unterkuben C^{m+1} und C^{m+2} von C''' nur eine β -Komponente haben. Dieses Argument läßt sich induktiv auf Kuben höherer Dimension zwischen C^m und $C^{m'}$ ausweiten. Es muß also ein Kubus C^* in den Folgen $C^{m+1}, \dots, C^{m'-1}$ auftreten, der entweder ganz in M liegt, oder zwei β -Komponenten in M^C hat. Mit dem Baryzentrum x von C^* läßt sich σ zu einem $(k+1)$ -Simplex erweitern, auf das die Induktionsvoraussetzung angewendet werden kann.

2.2. Fall: σ liegt in einem Kubus C der Dimension k . Wegen $k \neq n$ bleibt nur der Fall zu betrachten, daß alle Kuben, die C enthalten genau eine β -Komponente in M^C besitzen. In allen anderen Situationen existiert der gesuchte Kubus C^* offensichtlich.

C selbst liegt in diesem Fall ganz in M und es ist $k \neq n-1$, da $k = n-1$ mit dem Induktionsanfang abgehandelt ist.

Analog der Betrachtung in Fall 2.1.2.2 sind die Kuben $\tau_1 \cdots \tau_l(C)$, für Translationen τ_i , $1 \leq i \leq l$ die C nicht aufspannen und $l > 1$, ganz in M^C enthalten. Damit gilt für die $(k+2)$ -Kuben C' , in denen C liegt mit $1 \leq i \neq j \leq l$:

$$C' = C \cup \tau_i(C) \cup \tau_j(C) \cup \tau_i\tau_j(C)$$

und

$$\tau_i\tau_j(C) \subset M^C, C \subset M.$$

$\tau_i(C) \setminus M \neq \emptyset$. Damit sind die Punkte in M^C , die in all denen n -Kuben enthalten sind, die C als Unterkubus haben, β -zusammenhängend. Nach Lemma 5.3.5 ist dies aber ausgeschlossen. Es muß also ein Kubus C^* existieren, der C enthält und dessen Baryzentrum x in $K'(M)$ liegt. Damit ist die Behauptung per Induktion bewiesen. \square

5.4.2 Die Nichtdegeneriertheit

Lemma 5.4.2 *Für eine $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{Z}^n$ ist jedes $(n-2)$ -Simplex $\sigma \in K'(M)$ Seite von genau zwei $(n-1)$ -Simplizes $\sigma_1, \sigma_2 \in K'(M)$.*

Beweis. Es sei C der minimale k -Kubus, der σ enthält.

1. Fall: $k = n$. Der Kubus $C \setminus M$ besitzt dann zwei β -Zusammenhangskomponenten. Es sei $C^{i_0}, C^{i_1}, \dots, C^n$ die Folge der Kuben, deren Baryzentren die Ecken von σ sind.

1.1. Fall: Es existiert ein j , so daß $i_j + 2 = i_{j+1}$ und die Zahl der β -Komponenten von $C^{i_j} \setminus M$ und $C^{i_{j+1}} \setminus M$ ist verschieden. Dann ist wegen $\dim(\sigma) = n - 2$ entweder $i_0 > 0$ oder es existiert ein weiterer Index j' mit $i_{j'} + 2 = i_{j'+1}$. An der Stelle j' kann aber die Zahl der β -Komponenten von $C^{i_{j'}} \setminus M$ und $C^{i_{j'+1}} \setminus M$ nicht verschieden sein, da in der Folge nur Kuben mit keiner oder zwei β -Komponenten in M^C vorkommen. Die Kuben mit einer anderen Zahl von β -Komponenten in M^C treten schon an der Stelle j auf. Daher existieren genau zwei $i_{j'} + 1$ -Kuben C und C' , die $C^{i_{j'}}$ enthalten und in $C^{i_{j'+1}}$ enthalten sind. Die Baryzentren x und x' von C und C' liegen in $K'(M)$, da C und C' die gleiche Zahl von β -Komponenten wie $C^{i_{j'}}$ und $C^{i_{j'+1}}$ in M^C besitzen. Damit gibt es genau zwei $(n-1)$ -Kuben, die σ als Seite haben.

Ist $i_0 > 0$, so ist $i_0 = 1$ und die zwei Punkte von C^{i_0} müssen in $K'(M)$ liegen, da notwendigerweise $C^{i_0} \subset M$. Diese beiden Punkte erzeugen zusammen mit σ die zwei gesuchten $(n-1)$ -Simplizes σ_1 und σ_2 .

1.2. Fall: Es existiert ein j mit $i_j + 3 = i_{j+1}$. Da $\dim(\sigma) = n - 2$, ist $i_0 = 0$. Somit gilt nach Eigenschaft 4 von M für alle $0 \leq l \leq j$: $C^{i_l} \subset M$ und für alle $j < l \leq n$ hat $C^{i_l} \setminus M$ zwei β -Komponenten.

Es existieren nun drei Translationen τ_1, τ_2, τ_3 durch die sich $C^{i_{j+1}}$ aus C^{i_j} erzeugen läßt. Wir definieren folgende Kuben:

$$C_1 := C^{i_j} \cup \tau_1(C^{i_j})$$

$$C_2 := C^{i_j} \cup \tau_2(C^{i_j})$$

$$C_3 := C^{i_j} \cup \tau_3(C^{i_j})$$

und

$$C_{12} := C^{i_j} \cup \tau_1(C^{i_j}) \cup \tau_2(C^{i_j}) \cup \tau_1\tau_2(C^{i_j})$$

$$C_{13} := C^{i_j} \cup \tau_1(C^{i_j}) \cup \tau_3(C^{i_j}) \cup \tau_1\tau_3(C^{i_j})$$

$$C_{23} := C^{i_j} \cup \tau_2(C^{i_j}) \cup \tau_3(C^{i_j}) \cup \tau_2\tau_3(C^{i_j})$$

Diese Kuben erfüllen verschiedene Bedingungen bezüglich ihrer Lage in M .

1.2.1. Fall: $C_1, C_2, C_3 \subset M$, beziehungsweise C_{12}, C_{13}, C_{23} haben jeweils genau eine β -Komponente in M^C . Diese beiden Situationen sind wegen der Eigenschaft 4 von M äquivalent. Dieser Fall tritt nicht ein:

Aufgrund der Annahme an C_{xy} , $x, y = 1, 2, 3$, $x < y$ gilt

$$\begin{aligned} C_{xy} &= C^{i_j} \cup \tau_x(C^{i_j}) \cup \tau_y(C^{i_j}) \cup \tau_x\tau_y(C^{i_j}) \\ &\subset M \quad \setminus M \neq \emptyset \quad \setminus M \neq \emptyset \quad \cap M \neq \emptyset \end{aligned}$$

Wegen der Trennungseigenschaft von M und $C^{i_j} \subset M$ ist

$$(\tau_x\tau_y)^{-1}(\tau_x\tau_y(C^{i_j}) \cap M) \subset \tau_x^{-1}(\tau_x(C^{i_j}) \cap M) \cap \tau_y^{-1}(\tau_y(C^{i_j}) \cap M).$$

Damit folgt analog dem Fall 2.1.2.2 des Beweises von Lemma 5.4.1, daß $C^{i_{j+1}} \setminus M$ keine zwei β -Komponenten besitzen kann.

1.2.2. Fall: Es seien nun $C_1, C_2 \subset M$. Dann hat nach Fall 1.2.1 und dem Lemma 5.3.4 die Menge $C_3 \setminus M$ genau eine β -Komponente. Der Kubus C_{12} muß nach Eigenschaft 5.3.4 eine β -Komponente besitzen. Es bleibt zu zeigen, daß C_{13} und C_{23} jeweils nur eine β -Komponente in M^C besitzt.

Der Unterkubus $\tau_3(C^{i_j})$ besitzt Punkte in M^C . Wir betrachten den Kubus C_{13} . Hätte dieser zwei β -Komponenten in M^C , so müßten deren Punkte in $\tau_1(C^{i_j})$ und $\tau_1\tau_3(C^{i_j})$ liegen, da $C_1 \subset M$. Dann widerspräche aber die Folge

$$C^0, \dots, C^{i_j}, C_1, C_{13}, C^{i_{j+1}}, \dots, C^n$$

dem Lemma 5.3.4, da zwischen C_1 und C_{13} kein Kubus mit nur einer β -Komponente in M^C liegt. Analog läßt sich für C_{23} argumentieren.

Es existieren also nur die beiden Baryzentren von C_1 und C_2 in $K'(M)$, die mit σ die beiden gesuchten $(n-1)$ -Simplizes σ_1 und σ_2 bilden.

1.2.3. Fall: Es sei $C_1 \subset M$ und die Kuben C_2, C_3 besitzen in M^C genau eine β -Komponente. Dann besitzen C_{12} und C_{13} jeweils genau eine β -Zusammenhangskomponente. Die Argumentation ist analog zu der in Fall 1.2.2. Hätte nun C_{23} auch nur eine β -Komponente in M^C , so könnten wir wie im Fall 1.2.1 argumentieren und erhielten einen Widerspruch zum Fakt, daß $C^{ij+1} \setminus M$ zwei β -Komponenten besitzt.

Damit sind die Baryzentren von C_1 und C_{23} die gesuchten zwei Punkte, die die beiden $(n-1)$ -Simplizes σ_1 und σ_2 aus σ erzeugen.

1.2.4. Fall: Die Kuben C_{12} und C_{13} haben nun zwei β -Komponenten in M^C . C_{23} kann nur eine β -Komponente besitzen wegen Eigenschaft 4 und der Betrachtung in Fall 1.2.1. Wir müssen zeigen, daß C_1, C_2, C_3 alle genau eine β -Komponente in M^C haben.

Es kann $\tau_1(C^{ij})$ nicht ganz in M enthalten sein, da dann die Folge

$$C^0, \dots, C^{ij}, C_1, C_{12}, C^{ij+1}, \dots, C^n$$

der Eigenschaft 4 von M widerspräche. Analog kann für $\tau_2(C_j)$ und $\tau_3(C_j)$ argumentiert werden, dann aber mit C_2 und C_{12} bzw. C_3 und C_{13} .

C_1, C_2 und C_3 können auch nicht zwei β -Komponenten in M^C besitzen, da dann zum Beispiel im Fall $C_1 \setminus M$ die Folge

$$C^0, \dots, C^{ij}, C_1, C_{12}, C^{ij+1}, \dots, C^n$$

auch der Eigenschaft 4 von M widerspräche.

Damit sind die Baryzentren der Kuben C_{12} und C_{13} die gesuchten zwei Punkte, mit denen aus σ die beiden $(n-1)$ -Simplizes σ_1 und σ_2 erzeugt werden können.

1.2.5. Fall: $C_{12} \setminus M$ habe zwei β -Komponenten, $C_{13} \setminus M$ und $C_{23} \setminus M$ haben genau eine β -Komponente. Dann haben wegen Eigenschaft 4 die Kuben C_1 und C_2 notwendigerweise nur eine β -Komponente in M^C , da sie Unterkuben von C_{12} sind. Das bedeutet, daß Punkte aus M^C in $\tau_1(C^{ij})$ und $\tau_2(C^{ij})$ liegen. Hätte $C_3 \subset M$ genau eine β -Komponente, so könnten wir wieder analog zum Fall 1.2.1 einen Widerspruch herbeiführen. Denn dieser Fall betrachtet gerade die Situation, in der C_1, C_2 und C_3 nur eine β -Komponente in M^C haben.

Es ist also C_3 ganz in M . Damit sind die Baryzentren von C_{12} und C_3 die gesuchten Punkte, die mit σ die beiden $(n-1)$ -Simplizes σ_1 und σ_2 erzeugen.

2. Fall: $k < n$.

2.1. Fall: $C \subset M$ und $k = n-1$. Dann gilt in der Folge

$$C^{i_0}, C^{i_1}, \dots, C^{i_{k-1}}, C^{n-1}$$

entweder $i_0 = 0$ oder $i_0 = 1$. Im Falle $i_0 = 0$ können wir wie in Fall 1.1 argumentieren. Im Fall $i_0 = 1$ gibt es einen Index $j \in \{0, \dots, k-1\}$, so daß $i_{j+1} = i_j + 2$ gilt, da σ ein $(n-2)$ -Simplex ist. Dann gibt es genau zwei (i_j+1) -Kuben C_1 und C_2 die ganz in M liegen, da alle Kuben der Folge diese Eigenschaft besitzen. Deren Baryzentren erzeugen mit σ die $(n-1)$ -Simplizes σ_1 und σ_2 .

2.2. Fall: $C \setminus M$ hat zwei β -Komponenten und $k = n-1$. Dann haben die beiden n -Kuben C_1 und C_2 , die C enthalten nach Eigenschaft 4 von M zwei β -Komponenten in M^C und σ läßt sich mit ihren Baryzentren zu σ_1 und σ_2 erweitern.

2.3. Fall: $C \subset M$ und $k = n-2$. Nach Lemma 5.3.5 gibt es in $\bigcap_{p \in C} \setminus M$ genau zwei β -Komponenten, die in C_p und D_p für alle $p \in C$ liegen. $\bigcap_{p \in C} \setminus M$ enthält vier $(n-1)$ -Kuben C_1, \dots, C_4 und vier n -Kuben C'_1, \dots, C'_4 , die C enthalten. Es kann nur einer der folgenden Fälle eintreten:

1. Es gibt genau zwei $(n-2)$ -Kuben C_1 und C_2 die ganz in M liegen. Gäbe es mehr, hätte $\bigcap_{p \in C} \setminus M$ offensichtlich mehr als zwei β -Komponenten. Gäbe es nur einen, nur eine.
2. Es gibt genau zwei n -Kuben C_1 und C_2 , die in M^C zwei β -Komponenten besitzen. Die Begründung ist wie im ersten Fall.
3. Es gibt genau einen $(n-2)$ -Kubus C_1 , der ganz in M liegt und genau einen n -Kubus C_2 , der zwei β -Komponenten in M^C besitzt. Mit analoger Begründung wie im ersten Fall.

Von diesen drei Fälle kann genau einer eintreten. Es existieren also die beiden gesuchten Baryzentren und damit auch die gesuchten $(n-1)$ -Simplizes. \square

5.4.3 Der starke Zusammenhang

Lemma 5.4.3 *Es sei $M \subset \mathbb{Z}^n$, $n \geq 2$, eine $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit. Dann ist $K'(M)$ stark zusammenhängend.*

Wir beweisen zuerst die folgenden Behauptungen:

Behauptung 5.4.1 *Es seien $M \subset \mathbb{Z}^n$, $n \geq 2$, eine $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit und C_0, \dots, C_l eine Folge von k -Kuben, $1 \leq k \leq n-1$, mit $C_i \subset M$ für $0 \leq i \leq l$ und $C_i \cap C_{i+1}$ ist $(k-1)$ -Kubus für alle $i \in \{0, \dots, l-1\}$.*

Dann existiert eine Folge $\sigma_0, \dots, \sigma_{l'}$ von k -Simplizes in $K'(M)$ mit $\sigma_0 \subset C_0$ und $\sigma_{l'} \subset C_l$, so daß σ_i und σ_{i+1} für alle $i \in \{0, \dots, l' - 1\}$ eine gemeinsame $(k - 1)$ -Seite besitzen.

Beweis. Induktion über k .

$k = 1$. Die Folge C_0, \dots, C_l beschreibt einen π -Pfad in M , der einen Kantenzug in $K'(M)$ induziert. Wir konstruieren die Folge der 1-Simplizes durch abwechselndes Austauschen der aufeinanderfolgenden Punkte in M auf dem Pfad und der Baryzentren der 1-Kuben des Kantenzuges. Siehe auch Abbildung 5.11.

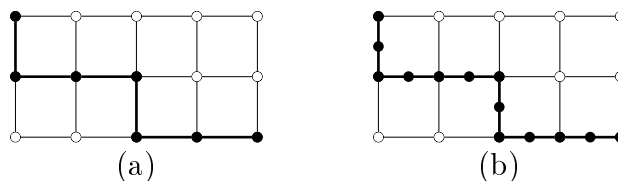


Abbildung 5.11: Ein π -Pfad in Bild (a) wird in einen Kantenzug im Sinne eines Siplizialkomplexes in Bild (b) überführt. Es ist offensichtlich wie Baryzentren und Punkte des Ursprünglichen Pfades getauscht werden müssen, um eine Folge von Simplicies wie in Behauptung 5.4.1 zu erhalten.

$k > 1$. Es sei C_0, \dots, C_l eine Folge von k -Kuben gemäß der Voraussetzung. Es sei σ_i das letzte gefundene k -Simplex in C_i in der bereits konstruierten Folge. In C_0 gibt es nach Konstruktion mindestens ein solches Simplex. σ_i hat das Baryzentrum x_i von C_i als Ecke. Es muß nun eine Folge von k -Simplizes gefunden werden, die von C_i nach C_{i+1} führt. Das Argument kann dann auf alle Kuben der Folge ausgedehnt werden.

$\sigma_i \setminus X_i$ ist ein $(k-1)$ -Simplex und Seite von σ_i . Es liegt nach Konstruktion in einem $(k-1)$ -Unterkubus C'_0 von C_i . $C_i \cap C_{i+1} = C_i$. Es existiert in C_i eine Folge von Unterkuben C'_0, \dots, C'_j die die Induktionsvoraussetzung erfüllt. Demnach gibt es eine Folge $\sigma \setminus x_i = \sigma'_0, \dots, \sigma'_j$ von $(k-1)$ -Simplizes, in der zwei aufeinanderfolgende Elemente eine gemeinsame $(k-2)$ -Seite besitzen.

Durch Hinzufügen von x_i zu all diesen Simplizes entsteht eine Folge $\sigma_i, \dots, \sigma_j$ von k -Simplizes, in der zwei aufeinanderfolgende Elemente einen gemeinsamen

$(k-1)$ -Simplex besitzen. Diese Folge liegt ganz in C_i . Um nun von C_i nach C_{i+1} zu gelangen, beobachten wir, daß σ'_j in dem C_i und C_{i+1} gemeinsamen $(k-1)$ -Kubus C'_j liegt. Das Simplex σ'_j mit dem Baryzentrum x_{i+1} von C_{i+1} ist also das gesuchte k -Simplex in C_{i+1} . \square

Behauptung 5.4.2 *Es seien $M \subset \mathbb{Z}^n$, $n \geq 2$, eine $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit und C_0, \dots, C_l eine Folge von k -Kuben mit zwei β -Komponenten in M^C und $(k-1)$ -Kuben mit keiner β -Komponente in M^C , $2 \leq k \leq n$, so daß gilt:*

1. *Im Schnitt zweier aufeinanderfolgender k -Kuben liegt entweder ein $(k-2)$ -Kubus in M oder ein $(k-1)$ -Kubus mit zwei β -Komponenten in M^C .*
2. *Der Schnitt zweier aufeinanderfolgender $(k-1)$ -Kuben ist ein $(k-2)$ -Kubus in M .*
3. *Der Durchschnitt eines k - und eines folgenden $(k-1)$ -Kubus ist ein $(k-2)$ -Kubus in M (bzw. umgekehrt).*

Dann existiert eine Folge $\sigma_0, \dots, \sigma_l$ von $(k-1)$ -Kuben, so daß $\sigma_0 \subset C_0$, $\sigma_l \subset C_l$ sowie σ_i und σ_{i+1} eine gemeinsame $(k-2)$ -Seite besitzen für $i \in \{0, \dots, l-1\}$.

Beweis. Induktion über k .

$k = 2$.

1. Teilfolgen von 2-Kuben mit zwei β -Komponenten in M^C enthalten einen α -Pfad, der eine Kantenfolge in $K'(M)$ induziert. Die Folge von 1-Simplizes erhält man durch abwechselndes Austauschen der Punkte in M und der Baryzentren der 2-Kuben auf dem Kantenzug.
2. Teilfolgen von 1-Kuben können wie in der Behauptung 5.4.1 erledigt werden.
3. Wir betrachten nun den Übergang von einer Teilfolge von 2-Kuben auf eine Teilfolge von 1-Kuben. Die umgekehrte Richtung wird analog bewiesen.

Es seien dazu C_i ein 2-Kubus mit zwei β -Komponenten in M^C und C_{i+1} ein ganz in M gelegener 1-Kubus. $C_i \cap C_{i+1}$ ist ein Punkt p in M . Der Übergang erfolgt durch Austausch des Baryzenters von C_i durch das von C_{i+1} beim gleichzeitigen Festhalten des Punktes p .

$k > 2$.

1. Es seien C_i und C_{i+1} zwei k -Kuben mit zwei β -Komponenten in M^C und σ_i der letzte gefundene $(k-1)$ -Simplex der zu konstruierenden Folge. Wir beschreiben den Übergang von C_i nach C_{i+1} . x_i sei das Baryzentrum von C_i und x_{i+1} sei das Baryzentrum von C_{i+1} .

1. Fall: $C_i \cap C_{i+1}$ ist ein $(k-2)$ -Kubus ganz in M . Dieser Fall schließt ein, daß sich C_i und C_{i+1} einen gemeinsamen $(k-1)$ -Kubus mit genau einer β -Komponente in M^C teilen.

σ_i besitzt eine Ecke p in M und in $C_i \cap C_{i+1}$ liegt ein Punkt p' aus M . Dann existiert ein α -Pfad von p nach p' , da M α -zusammenhängend ist. Dieser α -Pfad durchläuft gewisse $(k-1)$ -Seiten C'_0, \dots, C'_j von C_i in dieser Reihenfolge, mit $C_j \subset C_i \cap C_{i+1}$, so daß die Induktionsvoraussetzung erfüllt wird. Da diese Folge die Induktionsvoraussetzung erfüllt, existiert eine Folge $\sigma'_0, \dots, \sigma'_j$ von $(k-2)$ -Simplizes, in der zwei aufeinanderfolgende Elemente eine gemeinsame $(k-3)$ -Seite besitzen. Das Erweitern dieser Simplizes um das Baryzentrum x_i liefert eine Folge $\sigma_i, \dots, \sigma_j$ von $(k-1)$ -Simplizes in C_i , in der zwei aufeinanderfolgende Elemente eine gemeinsame $(k-2)$ -Seite besitzen. Da σ'_j in C'_j liegt kann die Folge um ein $(k-1)$ -Simplex σ_{j+1} erweitert werden, das durch verknüpfen von σ'_j mit x_{i+1} entsteht. Damit ist die Folge konstruiert.

2. Fall: $C_i \cap C_{i+1}$ ist ein $(k-1)$ -Simplex mit zwei β -Komponenten in M^C . Wir gehen analog dem ersten Fall vor, mit dem Unterschied, daß der Kubus C_j der Folge C_0, \dots, C_j nun ein $(k-1)$ -Kubus mit zwei β -Komponenten in M^C ist.

2. Der Fall einer Teilfolge von $(k-1)$ -Simplizes wird wie in Behauptung 5.4.1 behandelt.
3. Der Übergang von einem k -Kubus C_i in ein $(k-1)$ -Kubus C_{i+1} bzw. der umgekehrte Fall ist analog dem ersten Fall, mit dem Unterschied, daß der Kubus C_j der Folge C_0, \dots, C_j ein $(k-2)$ -Kubus ist, der ganz in M liegt.

□

Wir kommen nun zum Beweis des starken Zusammenhanges von $K'(M)$.

Beweis. Wir versuchen die Behauptung 5.4.2 anzuwenden.

Es seien σ und σ' zwei beliebige $(n-1)$ -Simplizes aus $K'(M)$. Dann besitzen σ und σ' jeweils eine Ecke in M . Diese beiden Ecken seien p und p' . Da M α -zusammenhängend ist, existiert ein α -Pfad P von p nach p' . Dieser schneidet gewisse n -Kuben C_0, \dots, C_l , die entweder eine oder zwei β -Komponenten in M^C besitzen.

Für zwei beliebige aufeinanderfolgende Punkte r und q des Pfades P wird nun gezeigt, daß sich eine Folge von Kuben konstruieren läßt, die den Voraussetzungen der Behauptung 5.4.2 genügt.

Der Pfad P induziert einen Kantenzug in $K'(M)$, auf dem ein 1-Simplex σ'_1 mit Ecke r und ein 1-Simplex σ'_2 mit Ecke q liegt. Diese beiden Simplizes sind nach Lemma 5.4.1 Seiten von zwei $(n-1)$ -Simplizes σ_1 und σ_2 .

1. Fall: σ_1 und σ_2 können so gewählt werden, daß sie in einem gemeinsamen n -Kubus C liegen

1.1. Fall: $C \setminus M$ hat zwei β -Komponenten. So erfüllt die Folge von Kuben C , die nur aus einem einzigen n -Kubus besteht, die Voraussetzung von Behauptung 5.4.2. Somit kann die gesuchte Folge von $(n-1)$ -Simplizes konstruiert werden.

1.2. Fall: $C \setminus M$ hat eine β -Komponente. Da σ_1 und σ_2 in C liegen, müssen sie auch in zwei $(n-1)$ -Kuben C_1 und C_2 zu finden sein, die jeweils ganz in M enthalten sind.

Gilt $C_1 = C_2$, so ist C_1 eine Folge von Kuben, die die Voraussetzungen von Behauptung 5.4.2 erfüllt. Sind C_1 und C_2 verschieden, so besitzen beide einen gemeinsamen $(n-2)$ -Unterkubus, da sonst C_2 aus einer Translation von C_1 hervorginge und C somit ganz in M läge. Auch hier ist die Voraussetzung von Behauptung 5.4.2 erfüllt.

2. Fall: Es existieren keine $(n-1)$ -Simplizes σ_1 und σ_2 , die in einem gemeinsamen n -Kubus liegen. Ein $(n-1)$ -Simplex kann nach Konstruktion nur in einem n - oder in einem $(n-1)$ -Kubus liegen.

Die Punkte r und q seien die einzigen Punkte aus M in einem k -Kubus C minimaler Dimension. Hat dieser die Dimension 1 so bleibt nur der Fall $n > 2$ zu betrachten, denn für $n = 2$ existieren in C offensichtlich 1-Simplizes, die durch die α -Adjazenz zwischen p und q gegeben sind. Nach der Voraussetzung in diesem Fall gibt es keinen n -Kubus, in dem $(n-1)$ -Simplizes mit Ecken r und q definiert werden können. Somit hat die Menge $\omega(r) \cap \omega(q) \setminus M$ nur eine β -Komponente, was nach Eigenschaft 3 einer $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit nicht möglich ist.

Für $k \geq 2$ läßt sich C trennen, denn r und q liegen auf einer Raumdiagonale von C , das heißt, wenn r in einem $(k - 2)$ Kubus C^* liegt, dann liegt q in $\tau_1\tau_2(C^*)$ für zwei passende Generatoren τ_1, τ_2 . Die Kuben $\tau_1(C^*)$ und $\tau_2(C^*)$ liegen aber ganz in einer β -Komponente von M^C . Das widerspricht der Trennungseigenschaft an M .

Es muß also ein weiterer Punkt s in diesem Kubus existieren, der mit r und q α -verbunden ist. Wir können nun den Pfad P lokal um s und eventuell um weitere Punkte auf Pfaden von s zu r und q erweitern.

Wir betrachten im weitem nur noch den Punkt s . In $\omega(s)$ gibt es einen n -Kubus, der q und r enthält, da $(q, s), (r, s) \in \omega$.

Es liege σ_1 in C' und σ_2 in C'' . Sowohl C' als auch C'' seien minimal gewählte Kuben in $\omega(s)$. Beide Kuben enthalten den Punkt s und je ein $(n - 1)$ -Simplex mit s als Ecke. Wir konstruieren eine Folge $F = (C_0, \dots, C_l)$ von Kuben durch $\omega(s)$. Dabei ist C' der letzte Kubus der bereits konstruierten Folge. Zu Beginn ist $F = (C')$. Weiterhin werden alle bereits untersuchten Kuben mit einer Marke versehen.

2.1. Fall: $\dim(C') = \dim(C'') = n$. Enthält $C^* = C' \cap C''$ einen $(n - 1)$ -Kubus mit zwei β -Komponenten in M^C oder einen $(n - 2)$ -Kubus in M , so ist die Folge F fertig konstruiert und entspricht den Voraussetzungen von Behauptung 5.4.2.

Ansonsten sei C ein n -Kubus, der noch nicht in F auftritt oder markiert ist. Haben $C \setminus M$ und $C^\# \setminus M = C \cap C' \setminus M$ zwei β -Komponenten in M^C , so füge C an das Ende der Folge und setze $C' = C$.

Gilt dies nicht, so haben alle C , die noch nicht in F sind und mit C' einen $(n - 1)$ -Kubus gemeinsam haben, in M^C genau eine β -Komponente.

Da in C' ein $(n - 1)$ -Simplex σ mit Ecke s liegt, hat C' einen $(n - 2)$ -Unterkubus $C^\#$ und $C^0, \dots, C^\#, C^*, C'$ ist die aufsteigende Folge von Kuben, die zu den Ecken dieses Simplex gehören. Da C^* nur eine β -Komponente in M^C besitzt, C' hingegen zwei, muß $C^\#$ in M liegen. Nach Lemma 5.3.5 gibt es in $\bigcap_{p \in C^\#} \omega(p) \setminus M$ zwei β -Komponenten. Damit existiert in der Menge $\bigcap_{p \in C^\#} \omega(p)$ ein Kubus C mit den Eigenschaften

$$\dim(C) = n - 1, C \subset M$$

oder

$$\dim(C) = n, C \setminus M \text{ hat zwei } \beta\text{-Komponenten.}$$

Kommt C nicht in F vor und ist C noch nicht markiert, so hänge C an das Ende von F an und setze $C' = C$.

Kommen stattdessen alle diese C schon in F vor oder sind markiert, wird der letztmöglich Kubus D in F gesucht, an dem einer der Fälle 2.1 bis 2.4 anwendbar ist. Alle Kuben in F zwischen D und C' werden aus der Folge entfernt und markiert. Daß D existiert, zeigen wir in Behauptung 5.4.3.

2.2. Fall: $\dim(C') = n - 1$ und $\dim(C'') = n$. Dann ist $C' \subset M$ und C'' wie in Fall 2.1. Ist $C^* = C' \cap C''$ ein $(n - 2)$ -Kubus ganz in M , so ist die Folge F fertig konstruiert.

Ansonsten gibt es in C' einen $(n - 2)$ -Kubus $C^\# \subset M$ für den nach Lemma 5.3.5 $\bigcap_{p \in C^\#} \omega(p) \setminus M$ zwei β -Komponenten besitzt.

Existiert in $\bigcap_{p \in C^\#} \omega(p)$ ein Kubus C mit

$$\dim(C) = n - 1, C \subset M$$

oder

$$\dim(C) = n, C \setminus M \text{ hat zwei } \beta\text{-Komponenten,}$$

der noch nicht in der Folge F vorkommt oder markiert ist, so füge ihn als Ende derselben an und setze $C' = C$

Suche andernfalls den letzten Kubus D der Folge, an dem eine Fortsetzung möglich ist. Lösche die Kuben D, \dots, C' aus der Folge und markiere sie.

2.3. Fall: $\dim(C') = n$ und $\dim(C'') = n - 1$. Ist $C^\# = C' \cap C''$ ein $(n - 2)$ -Kubus in M , so ist die Folge fertig konstruiert. Der Rest des Falles wird analog dem Fall 2.2 behandelt.

2.4. Fall: $\dim(C') = \dim(C'') = n - 1$. Ist $C^\# = C' \cap C''$ ein $(n - 2)$ -Kubus in M so ist die Folge konstruiert. Der Rest wird wie in Fall 2.2 behandelt.

Das Verfahren endet, da in $\omega(s)$ nur endlich viele n - und $(n - 1)$ - Kuben durchsucht werden können.

Es bleibt noch zu zeigen, daß durch dieses Verfahren der Kubus C'' in die Folge aufgenommen wird.

Behauptung 5.4.3 *Es sei $F = (C_0, \dots, C_l)$ die wie in Fall 2 konstruierte Folge mit $C_0 = C'$. Ist keiner der Fälle 2.1 bis 2.4 mehr anwendbar, so ist C'' ein Element von F .*

Beweis. Zum Beweis dieser Behauptung nehmen wir an, daß C'' niemals in der Folge F vorkommt.

Wir definieren die Menge \mathcal{C}_F als eine minimale Menge der n -Kuben, die die Punkte der Menge der Kuben in F und der markierten Kuben enthält, so daß

für zwei Kuben $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_F$ gilt: $C_1 \cap C_2$ ist $(n-1)$ -Kubus, oder es existiert eine Folge von n -Kuben C_1, \dots, C_2 in der der Schnitt zwei aufeinanderfolgender Kuben ein $(n-1)$ -Kubus ist. Die Menge \mathcal{C}_F ist definiert, da sie stets aus n -Kuben in $\omega(s)$ aufgebaut werden kann. $\overline{\mathcal{C}}_F$ sei die Menge der n -Kuben aus $\omega(s)$, die nicht in \mathcal{C}_F liegen und $\partial\mathcal{C}_F$ sei die Menge aller $(n-1)$ -Kuben, die Unterkuben eines n -Kubus in \mathcal{C}_F und eines n -Kubus in $\overline{\mathcal{C}}_F$ sind.

Da C'' nicht in F vorkommt, kann C'' auch nicht markiert worden sein. \mathcal{C}_F kann keinen n -Kubus mit zwei β -Komponenten in M^C besitzen, die einen Unterkubus mit der selben Eigenschaft in $\partial\mathcal{C}_F$ haben, denn sonst wäre der zweite n -Kubus, der diesen Unterkubus enthält, nicht in $\overline{\mathcal{C}}_F$.

Weiterhin liegen für je zwei Kuben $C_1, C_2 \in \partial\mathcal{C}_F$ die Punkte in $C_1 \setminus M$ und $C_2 \setminus M$, falls sie Punkte existieren, in der gleichen β -Komponente von $\omega(s) \setminus M$. Denn gibt es einen $(n-2)$ -Kubus $C^* \subset C_1 \cap C_2$ mit $C^* \subset M$, so liegen C_1, C_2 in n -Kuben C'_1 bzw. C'_2 in $\overline{\mathcal{C}}_F$. C'_1 und C'_2 liegen in $\bigcap_{p \in C^*}$, können dort aber nicht in verschiedenen β -Komponenten von $\omega(s) \setminus M$ liegen, da sonst einer von ihnen oder ihr gemeinsamer $(n-1)$ -Unterkubus in F gelangt oder markiert worden wäre. Das widerspräche aber ihrer Wahl aus $\overline{\mathcal{C}}_F$.

Liegt C^* nicht ganz in M , so sind $C_1 \setminus M$ und $C_2 \setminus M$ stets zusammenhängend, da C_1 und C_2 nur eine β -Komponente in M^C besitzen können.

Es bleibt noch der Fall zu betrachten, daß C_1 und C_2 keinen $(n-2)$ -Kubus als Schnitt haben. Aufgrund des Aufbaus von \mathcal{C}_F existiert dann eine Folge G von $(n-1)$ -Kuben zwischen C_1 und C_2 , in der zwei aufeinanderfolgende Elemente einen $(n-2)$ -Kubus als Schnitt haben als Einschränkung von \mathcal{C}_F auf $\partial\mathcal{C}_F$. Wir untersuchen zuerst die Situation, in der ein ganz in M liegender $(n-1)$ -Kubus C_i in G auf einen Kubus C_{i-1} mit Punkten in M^C folgt: Eine der β -Komponenten von $\bigcap_{p \in C_3} \omega(p) \setminus M$ läßt sich mit der β -Komponente von C_1 in $\bigcap_{p \in C^*} \omega(p) \setminus M$ verbinden. Dabei ist C^* der den Kuben C_{i-1} und C_i gemeinsame $(n-2)$ -Kubus. Für zwei in G aufeinanderfolgende $(n-1)$ -Kuben, die ganz in M liegen gilt die gleiche Aussage. Durch iteriertes Anwenden dieser Beobachtung kann unter Benutzung von G ein Pfad von $C_1 \setminus M$ zu $C_2 \setminus M$ konstruiert werden.

Es ist nun klar, daß \mathcal{C}_F n -Kuben mit einer oder zwei β -Komponenten in M^C enthalten kann. Manche (oder auch keine) dieser Kuben besitzen, wie die Abbildung 5.12 zeigt, einen Unterkubus in $\partial\mathcal{C}_F$, der Punkte in M^C besitzt. Wir können also die Komponente von $\bigcup \mathcal{C}_F \setminus M$ definieren, die keine Punkte in $\bigcup \partial\mathcal{C}_F$ besitzt. Diese heiße K_1 . $\bigcup \partial\mathcal{C}_F \setminus M$ kann leer sein. Ist das nicht der Fall, so existieren in $\bigcup \mathcal{C}_F \setminus M$ zwei β -Komponenten.

Da C'' in F nicht vorkommt, können wir das oben beschriebene Verfahren von C'' aus anwenden und erhalten eine Folge F' und diverse markierte n -

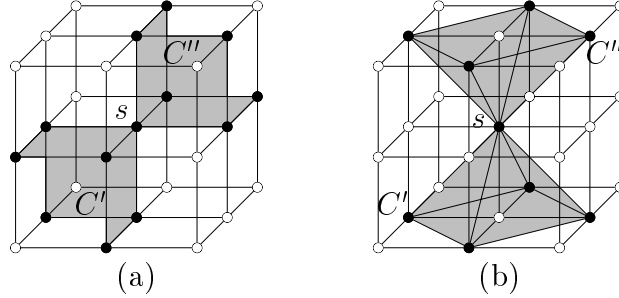


Abbildung 5.12: Zwei Fälle in 3D, in denen das beschriebene Verfahren, ausgehend von C' nicht den Kubus C'' findet. In beiden Fällen hat $\omega(s) \setminus M$ drei β -Komponenten. In Bild (a) ist $\bigcup \partial \mathcal{C}_F \setminus M$ leer, in Bild (b) nicht.

Kuben aus $\omega(s)$. Diese Kuben sind verschieden von denen, die während der Konstruktion von F betrachtet wurden. Es ist nun möglich, $\mathcal{C}_{F'}$, $\overline{\mathcal{C}}_{F'}$ und $\partial \mathcal{C}_{F'}$ zu definieren. Nach analoger Argumentation wie für F , erhalten wir eine β -Komponente von $\bigcup \mathcal{C}_{F'} \setminus M$, die keine Punkte in $\bigcup \partial \mathcal{C}_{F'} \setminus M$ besitzt.

K_1 und K_2 sind notwendigerweise verschieden und nicht β -verbunden, da $\mathcal{C}_F \subset \overline{\mathcal{C}}_{F'}$ und $\mathcal{C}_{F'} \subset \overline{\mathcal{C}}_F$ und jeder β -Pfad von K_1 nach $\bigcup \overline{\mathcal{C}}_F$ die Menge $\bigcup \partial \mathcal{C}_F$ schneidet. In dieser Menge gibt es aber keine Punkte in M^C zu denen die Punkte aus K_1 β -verbunden sind. Analoges gilt für K_2 .

Gilt nun

$$\left(\bigcup \partial \mathcal{C}_F \right) \cap \left(\bigcup \partial \mathcal{C}_{F'} \right) \setminus M \neq \emptyset,$$

so besitzt $\omega(s) \setminus M$ wegen $\partial \mathcal{C}_F = \partial \mathcal{C}_{F'}$ offensichtlich drei β -Komponenten. Das ist aber in einer digitalen $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit wegen Eigenschaft 2 nicht möglich. Daraus folgt der Widerspruch zur Annahme an C'' .

Gilt hingegen

$$\left(\bigcup \partial \mathcal{C}_F \right) \cap \left(\bigcup \partial \mathcal{C}_{F'} \right) \setminus M = \emptyset,$$

so kann nicht $\partial \mathcal{C}_F = \partial \mathcal{C}_{F'}$ gelten, da sonst jeder der $(n-2)$ -Kuben aus $\partial \mathcal{C}_F$ ganz in M liegt und somit sowohl in F als auch in F' vorkommt. Dies widerspricht aber der Annahme, daß C'' nicht in der Folge F ist.

Es sind also $\partial \mathcal{C}_f$ und $\partial \mathcal{C}_{F'}$ verschieden. Dann gibt es wegen $\mathcal{C}_F \cap \mathcal{C}_{F'} = \emptyset$ und $\bigcup \mathcal{C}_F \cap \bigcup \overline{\mathcal{C}}_F \neq \bigcup \mathcal{C}_{F'} \cap \bigcup \overline{\mathcal{C}}_{F'}$ einen n -Kubus D in $\overline{\mathcal{C}}_F \cap \overline{\mathcal{C}}_{F'}$. D besitzt einen Punkt aus M^C , der in $\bigcup \mathcal{C}_F \cap \bigcup \mathcal{C}_{F'}$ liegt und nicht zu K_1 oder K_2 β -verbunden ist. Demnach existieren drei β -Komponenten in $\omega(s) \setminus M$, was, wie oben bemerkt, in einer $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit nicht möglich ist. Widerspruch zur Annahme an C'' . \square

Es kommt also der Kubus C'' in der Folge F vor und wir können Behauptung 5.4.2 anwenden. \square

Somit ist der Satz 5.4.1 bewiesen. $K'(M)$ ist für jede digitale $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{Z}^n$ eine $(n-1)$ -Pseudomannigfaltigkeit. Deren geometrische Realisierung $|K'(M)|$ erfüllt den Satz von Jordan-Brouwer. $|K'(M)|$ besitzt in $\mathbb{R} \setminus |K'(M)|$ genau zwei Zusammenhangskomponenten, deren gemeinsamer Rand sie ist. Zusammen mit Lemma 5.3.1 und Satz 5.3.4 wird offenbar, daß auch $\mathbb{Z}^n \setminus M$ zwei β -Komponenten enthält. Daß ihrer beider Rand gerade M ist, folgt aus der nächsten Behauptung.

Behauptung 5.4.4 *Eine $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{Z}^n$ unter dem Paar (α, β) enthält keine einfachen Punkte.*

Beweis. Jeder Punkt $p \in M$ ist adjazent zu zwei β -Komponenten von $\omega(p) \setminus M$. Diese haben jeweils einen nichtleeren Durchschnitt mit den zwei nach Satz 5.2.1 vorhandenen β -Zusammenhangskomponenten von M^C , mit dem Entfernen von p aus M würden diese beiden β -Komponenten zu einer β -Komponente werden. Der Punkt p kann also nicht einfach sein. \square

Zum Schluß ist es nun nur bequem, die Existenz der guten Paare axiomatisch zu fordern, um die durch die Axiome 1-9 beschriebenen digitalen Geometrien mit den topologischen Begriffen Zusammenhang, Innen und Außen versehen zu können. Da es Modelle für diese 10 Axiome gibt, zeigt das nächste Kapitel.

Axiom 10 *Auf \mathcal{P} ist ein gutes Paar (α, β) von Adjazenzrelationen definiert.*

Kapitel 6

Gute Paare von Adjazenzrelationen

6.1 Kubische Adjazenzen

Wir wollen nun beginnen, diese abstrakten Begriffe auf die Menge \mathbb{Z}^n anzuwenden. Diese fassen wir zunächst im Sinne des Gridcube-Modells auf. Das bedeutet, daß die Punkte des \mathbb{Z}^n n -dimensionalen Würfeln mit Seitenlänge 1 haben und deren Mittelpunkte mit den Punkten des Gitters \mathbb{Z}^n zusammenfallen gleichgesetzt werden. Der Würfel W_n im \mathbb{Z}^n , der dem Punkt $(0, \dots, 0)$ entspricht, läßt sich im euklidischen Raum als $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$ beschreiben. Diese Gridcubes kann man im Sinne der Topologie auch als Vereinigung ihrer Seiten auffassen. Als Beispiel sei ein dreidimensionaler Gridcube gegeben: $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^3$, der als 0-dimensionale Seite unter anderem den Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ besitzt, als eindimensionale Seite die Strecke $[(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$ und als zweidimensionale Seite das Quadrat mit den Eckpunkten $\{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\}$.

Zwei verschiedene solcher Würfel können sich nun für $0 \leq k < n$ gewisse k -dimensionale Seiten, im weiteren kurz **k -Seiten** genannt, teilen. Sie tun dies, wenn ihr Durchschnitt gerade diese Seite ist. Zum Beispiel berühren sich die Elemente $(0, \dots, 0)$, daß heißt der Würfel W_n und $(1, \dots, 1)$, also W_n verschoben um den Vektor $(1, \dots, 1)$ an einem gemeinsamen Eckpunkt, der die Koordinaten $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ hat, also an eine 0-Seite. während sich die Elemente $(0, \dots, 0)$ und $(1, 0, \dots, 0)$ eine $(n - 1)$ -Seite teilen.

In der weiteren Betrachtung wird die Repräsentation der Gridcubes nicht mehr explizit gemacht. Wir identifizieren sie mit ihren Mittelpunkten, das heißt mit ihren Positionen im n -dimensionalen Gitter.

Es ist nun naheliegend, folgende Nachbarschaft zu definieren:

Definition 6.1.1 *Zwei Punkte $p, q \in \mathbb{Z}^n$ heißen k -adjazent für $0 \leq k < n$, in Zeichen $p \in \alpha_k(q)$, wenn ihre korrespondierenden Gitterwürfel eine k -Seite gemeinsam haben.*

Der Begriff *Adjazenzrelation* ist anwendbar, denn die maximal mögliche Anzahl von Punkten $q \in \mathbb{Z}^n$, die zu einem $p \in \mathbb{Z}^n$ im Sinne der Definition benachbart sein können, entspricht der Anzahl aller Seiten des mit p korrespondierenden Würfels, die endlich ist. Damit ist α_k finitär. \mathbb{Z}^n ist zusammenhängend bezüglich α_k , denn die Vereinigung der Gridcubes, von denen für jeden Punkt $p \in \mathbb{Z}^n$ genau einer existiert ergibt gerade den euklidischen Raum \mathbb{R}^n . Faßt man diese Gridcubes nun als Vereinigung offener Würfel auf erhält man eine Zellzerlegung des \mathbb{R}^n . Dieser ist zusammenhängend. Daraus folgt, daß der \mathbb{Z}^n unter α_0 zusammenhängend ist. Für andere α_k erhält man das Ergebnis in dem man Punkte p, q mit $q \in \alpha_0(p)$, aber $q \notin \alpha_k(p)$ durch α_k -Pfade innerhalb der α_0 -Umgebung von p bzw. q darstellt. Das ist immer möglich, da p und q durch Punkte die in $\alpha_0(p) \cup \alpha_k(p)$ liegen müssen verbunden werden können. Die letzte Eigenschaft folgt aus der Beobachtung, daß eine aus endlich vielen Punkten bestehende Menge M eine Repräsentation in \mathbb{R}^n besitzt, die als Vereinigung endlich vieler Gridcubes abgeschlossen und beschränkt ist, woraus die Existenz von einer unbeschränkten Komponente des \mathbb{R}^n folgt, aus der die Existenz einer unbeschränkten Komponente des $\mathbb{Z}^n \setminus M$ gefolgert werden kann.

Man sieht sofort, daß im \mathbb{Z}^n genau $n - 1$ solche Nachbarschaftsrelationen definiert werden können. Adjazenzrelationen dieses Typs heißen **regulär**. Mit ω wird im weiteren die Adjazenzrelation α_0 im \mathbb{Z}^n benannt.

Behauptung 6.1.1 *Es sei α eine reguläre Adjazenzrelation auf \mathbb{Z}^n . Dann gilt:*

1. α ist translationsinvariant.
2. α ist invariant unter Koordinatenpermutation.

Beweis. Es sei τ eine Translation auf \mathbb{Z}^n . Es ist zu zeigen: $\tau(\alpha(p)) = \alpha(\tau(p))$ für ein beliebiges $p \in \mathbb{Z}^n$. Aus der Darstellung von $\alpha(p)$ erhält man:

$$\begin{aligned}
 \tau(\alpha(p)) &= \tau(\{q \in \mathbb{Z}^n : q \in \alpha(p)\}) \\
 &= \{\tau(q) : q \in \mathbb{Z}^n, q \in \alpha(p)\} \\
 &= \{q' \in \mathbb{Z}^n : q' \in \alpha(\tau(p))\} \\
 &= \alpha(\tau(p))
 \end{aligned}$$

Der zweite Teil der Behauptung wird analog bewiesen, wobei eine Permutation der Koordinaten die Rolle der Translation im ersten Teil einnimmt. \square

Behauptung 6.1.2 $\alpha_k(x_1, \dots, x_n)$ läßt sich im \mathbb{Z}^n darstellen als die Menge:

$$\left\{ (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}^n : \max_{i=1, \dots, n} \{|x_i - y_i|\} = 1, 1 \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \leq n - k \right\}$$

Beweis. Es seien p und q Punkte des \mathbb{Z}^n mit $p \in \alpha_k(q)$. Das heißt, daß die korrespondierenden Gitterwürfel eine k -Seite gemeinsam haben. Ihr Abstand bezüglich der Maximummetrik kann also nicht größer als 1 sein. Weiterhin gilt, daß p und q nicht allein eine l -Seite besitzen können für $0 \leq l \leq k$. Das heißt nicht, daß sich sich keine l -Seiten teilen, denn diese sind als Teilmengen der k -Seite auch Teilmengen der Gridcubes. Die Punkte können also in nicht mehr als k Koordinaten gleich sein, um adjazent zu sein. \square

Welche Struktur haben nun die einzelnen k -Adjazenzen im \mathbb{Z}^n ? Zur Beantwortung dieser Frage kann die Betrachtung der Rasterwürfel eine entscheidende Hilfe bieten:

Behauptung 6.1.3 Die Anzahl der k -Seiten eines n -dimensionalen Würfels ist $\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$

Beweis. Wir beweisen die Aussage induktiv über die Dimension des Würfels. Ein 0-dimensionaler Würfel ist ein Punkt, besitzt also nur eine 0-Seite, was mit der Behauptung übereinstimmt.

Ein Würfel der Dimension $n > 0$ läßt sich aus einem $(n - 1)$ -dimensionalen Würfel erzeugen, indem man diesen verdoppelt und eine k -Seite erzeugt für jede $(k - 1)$ -Seite des Originals ($k = 1, \dots, n$). Also erhält man unter Ausnutzung der Induktionsbehauptung und des wohlbekannten Satzes von Pascal:

$$\begin{aligned} 2 \binom{n-1}{k} \cdot 2^{n-1-k} + \binom{n-1}{k-1} \cdot 2^{n-1-(k-1)} &= \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] \cdot 2^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} \end{aligned}$$

\square

Behauptung 6.1.4 Für jedes $p \in \mathbb{Z}^n$ ist die Anzahl der k -Nachbarn von p $|\alpha_k(p)| = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \cdot 2^{n-i}$.

Beweis. Offensichtlich enthält jede l -Seite σ eines Würfels mindestens eine k -Seite τ für $0 \leq k \leq l \leq n$. Denn σ ist selbst ein Würfel. Demzufolge existieren k -zusammenhängende Würfel die auch l -adjazent sind, nämlich diese, die mehr als eine k -Seite gemein haben. Damit läßt sich die Menge α_k der zu $p \in \mathbb{Z}^n$ adjazenten Elemente auch folgendermaßen in disjunkte Mengen zerlegen:

$$\begin{aligned} \alpha_k(p) &= \{q \in \mathbb{Z}^n : p, q \text{ teilen sich höchstens eine } k\text{-Seite}\} \\ &\cup \{q \in \mathbb{Z}^n : p, q \text{ teilen sich höchstens eine } (k+1)\text{-Seite}\} \\ &\vdots \\ &\cup \{q \in \mathbb{Z}^n : p, q \text{ teilen sich höchstens eine } (n-1)\text{-Seite}\} \end{aligned}$$

Durch Addition der Kardinalitäten dieser Mengen, die mittels der letzten Behauptung berechnet werden können, erhält man mit $\alpha_k(p) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} 2^{n-i}$ die Behauptung. \square

Somit erhält man als Beispiele regulärer Adjazenzrelationen im \mathbb{Z}^2 die bekannte 4- bzw. 8-Nachbarschaft, im \mathbb{Z}^3 die 6-, 18- und 26-Nachbarschaft und im \mathbb{Z}^4 die 8-, 32-, 64- und 80-Nachbarschaft.

6.2 Gute Paare kubischer Adjazenzen

Behauptung 6.2.1 Ist α eine kubische Adjazenz in \mathbb{Z}^n , so ist für alle $p \in \mathbb{Z}^n$ die Menge $\alpha(p)$ graphentheoretisch isomorph zu $\alpha(0)$.

Beweis. Die Aussage folgt aus der Definition kubischer Adjazenzen und deren Translationsinvarianz \square

Behauptung 6.2.2 Es sei $M \subset \mathbb{Z}^n$ α_k -zusammenhängend. Dann ist M α_l -zusammenhängend für $0 \leq l < k \leq n-1$.

Beweis. M ist α_k -zusammenhängend. Es existiert also für beliebige p, q ein Pfad $p = p^{(0)}, \dots, p^{(a)} = q$ mit $p^{(i)} \in M$ für $i \in \{0, \dots, a\}$ und $p^{(i-1)} \in \alpha_k(p^{(i)})$ für $i \in \{1, \dots, a\}$. Nach Definition ... von α_k und $l < k$ gilt für $p^{(i-1)}$ und $p^{(i)}$: $|p_j^{(i)} - p_j^{(i-1)}| \leq 1$ und

$$1 \leq \sum_{j=1}^n |p_j^{(i)} - p_j^{(i-1)}| \leq n - k < n - l.$$

damit gilt $p^{(i-1)} \in \alpha_k(p^{(i)})$ für $i \in \{1, \dots, a\}$ und $p = p^{(0)}, \dots, p^{(a)} = q$ ist ein α_l -Pfad. \square

Wir untersuchen nun, welche Paare kubischer Adjazenzen die Flächendefinition erfüllen.

Behauptung 6.2.3 Für Paare (α_l, α_k) von kubischen Adjazenzen auf \mathbb{Z}^n mit $n \geq 2$, ist für jeden n -Kubus C die Menge $C \cap \alpha_k(0)$ unter α_l zusammenhängend, wenn gilt:

1. $0 \leq k \leq n - 2$ und $0 \leq l \leq n - 1$ oder
2. $k = n - 1$ und $0 \leq l \leq n - 2$.

Beweis. 1. Wir benutzen die Behauptung 6.2.2 und zeigen die Behauptung nur für $l = n - 1$

Es sei C' ein beliebiger Unterkubus von C , der nicht den Punkt 0 enthält. Wir zeigen zuerst, daß $C' \cap M$ α_l -zusammenhängend ist. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß der Punkt $p = (1, 0, \dots, 0)$ in C' liegt und wählen einen beliebigen von p verschiedenen Punkt $r \in C' \setminus M$. Dann hat r die Form $r = (1, r_2, \dots, r_n)$ mit

$$\max_{i=1, \dots, n} |r_i| = 1 \text{ und } 1 \leq 1 + \sum_{i=2}^n |r_i| \leq n - k$$

Wir wählen den kleinsten Index $i \in \{2, \dots, n\}$, so daß $r_i \neq 0$ und definieren

$$r' = (1, r_2, \dots, r_{i-1}, 0, r_{i+1}, \dots, r_n).$$

Es ist $r' \in \alpha_{n-1}(r)$:

$$\max_{i=1, \dots, n} |r'_i| = 1 \text{ und } 1 \leq \sum_{i=1}^n |r'_i - r_i| = |r'_i - r_i| = 1 \leq n - (n - 1).$$

Die Iteration dieses Verfahrens liefert einen α_{n-1} -Pfad von r nach p .

Es seien nun C' und C'' zwei verschiedene $(n-1)$ -Kuben. Wir können wieder o.B.d.A. annehmen, daß $p = (1, 0, \dots, 0) \in C'$ und $q = (0, 1, 0, \dots, 0) \in C''$. Dann besitzen C' und C'' einen gemeinsamen Punkt $t = (1, 1, 0, \dots, 0)$ in M . Denn der Punkt t ist zu p und q α_{n-1} -adjazent und es ist $t \in \alpha_k(0)$ für $0 \leq k \leq n-2$:

$$\max_{i=1, \dots, n} |t_i| = 1 \text{ und } \sum_{i=1}^n |t_i| = 2 \leq n - k.$$

Damit ist $C \cap \alpha_k(0)$ α_{n-1} -zusammenhängend.

2. Wir zeigen, daß $C \cap \alpha_{n-1}$ für unter α_{n-2} zusammenhängend ist. Dies genügt wieder nach Behauptung 6.2.2.

$C \cap \alpha_{n-1}$ enthält alle Punkte $p^{(i)} = (p_1, \dots, p_n)$, so daß genau ein $i \in \{1, \dots, n\}$ existiert mit $p_i^{(i)} \neq 0$ und $|p_i^{(i)}| = 1$. Es seien nun $p^{(i)}$ und $p^{(j)}$ zwei Punkte mit $i \neq j$. Dann ist

$$\max_{m=1, \dots, n} |p_m^{(i)} - p_m^{(j)}| = 1 \text{ und } \sum_{m=1}^n |p_m^{(i)} - p_m^{(j)}| = 2 \leq n - (n-2).$$

$p^{(i)}$ und $p^{(j)}$ sind also α_{n-2} -zusammenhängend. □

Folgerung 6.2.1 Für Paare (α_l, α_k) ist $\alpha_k(0)$ α_l -zusammenhängend, wenn gilt:

1. $0 \leq k \leq n-2$ und $0 \leq l \leq n-1$ oder
2. $k = n-1$ und $0 \leq l \leq n-2$.

Beweis. Dies folgt aus der Anordnung der n -Kuben in $\omega(0)$ und der Verteilung der π -Nachbarn von 0 auf diese. □

Behauptung 6.2.4 Es sei (α_l, α_k) ein Paar von kubischen Adjazenzen auf \mathbb{Z}^n mit $n \geq 2$. Dann besitzt $\omega(p) \setminus \alpha_k(0)$ für alle $p \in \alpha_k(0)$ genau zwei α_k -Komponenten.

Beweis. Es ist klar, daß 0 für jeden Punkt $p \in \alpha_k(0)$ in $\omega(p)$ liegt und keine weiteren α_k -Nachbarn besitzt.

Wir wählen nun einen beliebigen Punkt p in $\alpha_k(0)$. Dann enthält $\omega(p)$ Punkte s mit $\max_{i=1,\dots,n} |s_i| = 2$. Diese liegen nicht in $\alpha_k(0)$, und bilden eine π -zusammenhängende Menge, sind also insbesondere α_k -zusammenhängend.

Es sei

$$\omega(p)_i := \{s \in \omega(p) : |s_i| = 2\}.$$

Wir betrachten o.B.d.A. $\omega(p)_1$ mit dem Punkt $(2, p_2, \dots, p_n)$. Man sieht leicht, daß entweder der Punkt $p' = (2, p_2, \dots, p_n)$ oder $(-2, p_2, \dots, p_n)$ in $\omega(p)_1$ liegt.

Nun sei $s = (2, s_2, \dots, s_n)$ ein beliebiger Punkt aus $\omega(p)_i$. Wir können einen π -Pfad von s zu p' konstruieren, indem wir für den kleinsten Index $i \in \{2, \dots, n\}$, an dem $s_i \neq p_i$ ist, den Punkt

$$s' = (2, \dots, p_2, \dots, p_{i-1}, p_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

definieren. Dieser ist ein π -Nachbar von s und nach endlich vielen Iterationen dieses Verfahrens ist ein π -Pfad von s nach p' konstruiert.

Die Mengen $\omega(p)_i$ und $\omega(p)_j$ enthalten die Punkte

$$(p_1, \dots, p_{i-1}, 2, p_{i+1}, \dots, p_n)$$

beziehungsweise

$$(p_1, \dots, p_{j-1}, 2, p_{j+1}, \dots, p_n).$$

In beiden Mengen ist dann der Punkt

$$t = (p_1, \dots, p_{i-1}, 2, p_{i+1}, \dots, p_{j-1}, 2, p_{j+1}, \dots, p_n)$$

enthalten. Daraus folgt deren π -Zusammenhang.

Es bleibt noch zu zeigen, daß Punkte in $\omega(0) \setminus \alpha_k(0) \cap \omega(p)$ zu einer dieser Mengen $\omega(p)_i$ π -benachbart sind. Es sei $i \in \{1, \dots, n\}$, so daß $s_i = p_i \neq 0$. Ist $p_i > 0$, so ist

$$s' = (s_0, \dots, s_{i-1}, s_i + 1, s_{i+1}, \dots, s_n) \in \omega(p)_i$$

und ist $p_i < 0$, so ist

$$s' = (s_0, \dots, s_{i-1}, s_i - 1, s_{i+1}, \dots, s_n) \in \omega(p)_i.$$

Für den Fall der Punkte s mit $0 = s_i \neq p_i$ ist der Punkt

$$s' = (s_1, \dots, s_{i-1}, p_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

ein π -Nachbar von s , der nicht in $\alpha_k(0)$ liegt. Denn

$$n - k < \sum_{j=1}^n |s_j| < \sum_{j=1}^{i-1} |s_j| + |p_i| + \sum_{j=i}^n |s_j| = \sum_{j=1}^n |s_j| + 1.$$

Deshalb existiert in $\alpha_k(0) \setminus \omega(p)$ außer dem Punkt 0 nur noch eine weitere α_k -Komponente. \square

Behauptung 6.2.5 *Es sei (α_l, α_k) ein Paar von kubischen Adjazenzen auf \mathbb{Z}^n mit $n \geq 2$. Für alle $p \in \alpha_k(0)$ sind alle $q \in \alpha_l(p) \cup \alpha_k(0)$ zu den beiden α_k -Komponenten von $\omega(p) \setminus \alpha_k(0)$ α_k -adjazent, wenn gilt:*

1. $1 \leq k \leq n - 1$ und $0 \leq l \leq n - 1$
2. $0 \leq k \leq n - 2$ und $l = n - 1$

Beweis. 1. Es seien $p \in \alpha_k(0)$ und $q \in \alpha_l \cap \alpha_k(0)$ beliebig gewählt. Wegen $q \in \alpha_k(0)$ ist q α_k -adjazent zur α_k -Komponente $\{0\}$.

Wir definieren nun die Menge

$$I(p, q) := \{1 \leq i \leq n : p_i = q_i = 0\}.$$

Diese ist nichtleer wegen $1 \leq k \leq n - 1$. Der Punkt $q' = (q'_1, \dots, q'_n)$ sei der Punkt mit folgenden Koordinaten:

$$q'_i = \begin{cases} q_i & \text{falls } q_i \neq 0 \\ p_i & \text{falls } q_i = 0 \text{ und } p_i \neq 0 \end{cases}$$

Die verbleibenden q'_i für $i \in I(p, q)$ werden mit ± 1 und 0 belegt, so daß genau $n - k + 1$ der n Koordinaten von 0 verschieden sind.

Der Punkt q' liegt nicht in $\alpha_k(0)$, denn

$$\sum_{i=1}^n |q'_i| = n - k + 1 > n - k.$$

Wegen $|q'_i - p_i| \leq 1$ ist q' ein Punkt in $\omega(p)$. Es liegt also q' in $\omega(p) \setminus (\alpha_k(0) \cup \{0\})$. Weil q von 0 verschieden ist gilt

$$\sum_{i=1}^n |q'_i - q_i| = \sum_{i=1}^n |q'_i| - \sum_{i=1}^n |q_i| \leq n - k.$$

Damit ist $q' \in \alpha_k(q)$. Die Menge $\omega(p) \setminus (\alpha_k(0) \cup \{0\})$ ist also α_k -adjazent zu q .

Für $k = n - 1$ und $l = n - 1$ ist die Menge $\alpha_l(p) \cap \alpha_k(0)$ leer. Die Forderung ist also trivialerweise erfüllt.

Daß k nicht gleich 0 gewählt werden darf für $0 \leq l \leq n - 2$, erkennt man an folgendem Beispiel. Ist $p \in \pi(0)$ und $q \in \alpha_l(p) \cap \pi(0)$ so ist

$$\sum_{i=1}^n |p_i - q_i| = 2 \leq n - l,$$

also $q \in \alpha_l(p)$. Der Punkt q hat aber keine α_0 -Nachbarn in $\omega(p) \setminus \alpha_0(0)$, weil $\alpha_0 = \omega$ ist und weil für alle $r \in \omega(p) \setminus (\omega(0) \cup \{0\})$ $r_i = \pm 2$ für $p_i = \pm 1$ gilt.

2. Es seien wieder $p \in \alpha_k(0)$ und $q \in \alpha_{n-1}(p) \cap \alpha_k(0)$ beliebig gewählt. q ist offenbar α_k -adjazent zu $\{0\}$.

Wir wählen nun ein

$$i \in \{1 \leq i \leq n : p_i \neq 0 \text{ und } q_i \neq 0\}.$$

Diese Menge ist nichtleer, da q und p wegen $q \in \alpha_{n-1}(p) \cap \gamma_k(0)$ in mindestens einer von 0 verschiedenen Koordinate übereinstimmen müssen. Wir definieren

$$q' = \begin{cases} (q_1, \dots, q_{i-1}, q_i + 1, q_{i+1}, \dots, q_n) & \text{falls } p_i = 1 \\ (q_1, \dots, q_{i-1}, q_i - 1, q_{i+1}, \dots, q_n) & \text{falls } p_i = -1 \end{cases}$$

Wegen $|q'_j - p_j| \leq 1$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ liegt $q' \in \omega(p)$. Es ist $|q_i| = 2$, sonst wäre $|q_i - p_i| \leq 1$, daraus folgt, daß $q' \notin \alpha_k(0)$ und $q' \neq 0$. Also ist q' ein Punkt in $\omega(p) \setminus (\alpha_k(0) \cup \{0\})$. Der Punkt q' ist ein π -Nachbar von q und damit auch ein α_k -Nachbar. Der Punkt q ist also α_k -adjazent zu $\omega(p) \setminus (\alpha_k(0) \cup \{0\})$.

□

Behauptung 6.2.6 *Es sei (α_l, α_k) ein Paar von kubischen Adjazenzen. Dann erfüllt $\alpha_k(0)$ unter diesem Paar die Trennungseigenschaft.*

Beweis. Wir betrachten statt $\alpha_k(0)$ die Menge $\overline{\alpha}_k(0) = \alpha_k(0) \cup \{0\}$. Denn der Punkt 0 bildet eine α_k -Komponente von $\alpha_k(0)^C$, ist nicht trennbar und kann somit die Trennbarkeit anderer Punkte nicht beeinflussen. Wenn wir wissen, daß $\overline{\alpha}(0)$ die Trennungseigenschaft besitzt, wissen wir das auch für $\alpha_k(0)$.

Es sei C ein m -Kubus, $2 \leq m \leq n$, der einen Punkt von $\overline{\alpha}_k(0)$ besitzt. C^* sei ein $(m-2)$ -Unterkubus von C , der einen maximalen Schnitt mit $\overline{\alpha}_k(0)$ hat.

1. Fall: $\tau_i(C^*)$ enthält für $i = 1$ oder $i = 2$ einen Punkt p mit $\max_{i=1, \dots, n} |p_i| = 2$.
2. Dann enthält $\tau_1 \tau_2(C^*)$ auch einen Punkt p mit $\max_{i=1, \dots, n} |p_i| = 2$. Dann liegt aber $\tau_1 \tau_2(C^*)$ ganz in M^C , wie man leicht nachrechnet. Also gilt:

$$(\tau_1 \tau_2)^{-1}(\tau_1 \tau_2(C^*) \cap M) \subset \tau_1^{-1}(\tau_1(C^*) \cap M) \cap \tau_2^{-1}(\tau_2(C^*) \cap M) \subset C^* \cap M.$$

Die gilt insbesondere dann, wenn $\tau_i(C^*) \setminus \overline{\alpha}_k(0) \neq \emptyset$, $i = 1, 2$ und beide Mengen α_k -zusammenhängen.

2. Fall: C enthält keinen Punkt p mit $\max_{i=1, \dots, n} |p_i| = 2$. Es sei $q \in C^*$ der Punkt mit $\sum_{i=1}^n |q_i| = x$ und $0 \leq x \leq n-k$ sei minimal in C . Die Minimalität in C reicht aus, wie aus der anschließenden Betrachtung folgt. Es gilt:

$$\begin{aligned} C^* \cap M &= \left\{ p : \sum_{i=1}^n |p - i| \leq \min(m-2, n-k) - x \right\} \\ \tau_{1,2}(C^*) \cap M &= \left\{ p : \sum_{i=1}^n |p - i| \leq \min(m-3, n-k-1) - x \right\} \\ \tau_1 \tau_2(C^*) \cap M &= \left\{ p : \sum_{i=1}^n |p - i| \leq \min(m-4, n-k-2) - x \right\} \end{aligned}$$

Es ist C^* also stets ein Kubus mit maximaler Anzahl von Punkten in $\overline{\alpha}_k(0)$. Haben $\tau_{1,2}(C^*)$ bzw. $\tau_1 \tau_2(C^*)$ auch eine maximale Anzahl von Punkten in $\overline{\alpha}_k(0)$, so liegen sie ganz in $\overline{\alpha}_k(0)$.

Damit haben wir folgende Inklusionskette

$$(\tau_1 \tau_2)^{-1}(\tau_1 \tau_2(C^*) \cap M) \subset \tau_1^{-1}(\tau_1(C^*) \cap M) \cap \tau_2^{-1}(\tau_2(C^*) \cap M) \subset C^* \cap M.$$

Diese Kette ist insbesondere dann richtig, wenn $\tau_i(C^*) \setminus \overline{\alpha}_k(0) \neq \emptyset$, $i = 1, 2$ und beide Mengen α_k -zusammenhängen.

In beiden Fällen gilt also die Trennungseigenschaft. \square

Behauptung 6.2.7 *Es seien (α_i, α_k) ein Paar von kubischen Adjazenzen und C^0, \dots, C^n eine Folge von Kuben die Punkte aus $\alpha_k(0)$. Dann ist die Zahl der α_k -Komponenten von $C^i \setminus \alpha_k(0)$ um höchstens 1 kleiner als die Zahl der α_k -Komponenten von $C^{i+1} \setminus \alpha_k(0)$ für alle $i \in \{0, \dots, n-1\}$.*

Beweis. Für $0 < k \leq n$ nehmen wir an, es gibt in einer solchen Folge C^0, \dots, C^n einen Kubus C^{i+1} , der in $C^{i+1} \setminus \alpha_k(0)$ zwei α_k -Komponenten mehr hat als C^i in $C^{i+1} \setminus \alpha_k(0)$. Nach der Behauptung 6.2.5 ist die Zahl der α_k -Komponenten in $C^n \setminus \alpha_k(0)$ höchstens gleich zwei. Da $\alpha_k(0)$ die Trennungseigenschaft besitzt, gilt nach Lemma 5.1.1, daß C^n und damit $C^{i+1} \setminus \alpha_k(0)$ zwei α_k -Komponenten besitzt. Demnach liegt C^i ganz in $\alpha_k(0)$.

$C^{i+1} = C^i \cup \tau(C^i)$ für einen geeigneten Generator τ von \mathbb{Z}^n . Daraus folgt, daß $\tau(C^i)$ zwei α_k -Komponenten besitzen muß. Eine davon ist der Punkt 0. Die andere enthält einen Punkt p . Da p in $\omega(0) \setminus \alpha_k(0)$ liegt, gilt

$$\max_{i=1, \dots, n} |p_i| = 1 \text{ und } \sum_{i=1}^n |p_i| > n - k.$$

Der Punkt $-\tau(p)$ liegt in C^i und damit in $\alpha_k(0)$. Es ist aber Entweder $-\tau(p) = (p_1, \dots, p_i + 1, \dots, p_n)$ oder $-\tau(p) = (p_1, \dots, p_i - 1, \dots, p_n)$. Beide Punkte liegen in $\omega(0)$, denn $\tau(C^i)$ enthält die 0. Es ist also $p_i = 0$, und deshalb folgt

$$\sum_{j=1}^{i-1} |p_j| + 1 + \sum_{j=i+1}^n |p_j| > n - k.$$

Der Punkt $-\tau(p)$ liegt also gar nicht in $C^i \cup \alpha_k(0)$. C^i kann also nicht ganz in $\alpha_k(0)$ liegen. Dies widerspricht der Annahme. \square

Behauptung 6.2.8 *Es gilt:*

1. Die Menge $\alpha_{n-1}(0) \subset \mathbb{Z}^n$ enthält keine α_k -Doppelpunkte für $0 \leq k \leq n - 1$.
2. Die Menge $\alpha_k(0) \subset \mathbb{Z}^n$ enthält keine α_{n-1} -Doppelpunkte für $0 \leq k \leq n - 2$.

Beweis. 1. Es sei $p \in \alpha_{n-1}(0)$. Dann hat p die Form $(0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0)$. Der Punkt p kann in $\alpha_{n-1}(0)$ keine π -Nachbarn $r = (r_1, \dots, r_n)$ besitzen, denn für diese gilt:

$$\sum_{i=1}^n |p_i - r_i| = 1.$$

Der Punkt r darf nicht 0 sein, daher gilt für r :

$$\sum_{i=1}^n |r_i| = 2.$$

Es kann also kein π -Nachbar von p in $\alpha_{n-1}(0)$ liegen. Damit gibt es kein p welches die Definition 5.2.6 erfüllt.

2. Es ist zu zeigen, daß für kein $p \in \alpha_k(0)$ mit $0 \leq k \leq n-2$ zwei Punkte $r \in \pi(0) \cap \alpha_{n-2}(p)$ und $q \in \pi(0) \cap \alpha_k(0)$, sowie ein $\sigma \in \mathcal{T}$ mit $\sigma(r) = 0$ und $\sigma(q) = p$ existieren mit $r \in \alpha_{n-1}(p)$.

Wir nehmen an, eine solche Punktekonfiguration existiert. Dann sind die zwei Punkte q und r α_{n-1} -adjazent. Das heißt,

$$\sum_{i=1}^n |r_i - q_i| = 1, |r_i - q_i| \leq 1 \text{ für } 1 \leq i \leq n.$$

Damit muß ein j in $\{1, \dots, n\}$ existieren mit $r_j \neq q_j$ und $r_i = q_i$ für alle anderen Indizes.

Weiterhin liegt $q \in \pi(0)$, q läßt sich darstellen als $(0, \dots, \pm 1, 0, \dots, 0)$ mit $q_l = \pm 1$. Außerdem ist $q_l = r_l$.

Aus $\sigma(r) = 0$ läßt sich $(-\sigma)(q) = p = (q_1 - r_1, \dots, q_n - r_n)$ folgern. Das heißt wir haben die Darstellung

$$p = (0, \dots, 0, q_j - r_j, 0, \dots, 0)$$

Nun muß auch $r \in \pi(p)$ gelten. Insbesondere muß $|p_i - r_i| \leq 1$ für alle $1 \leq i \leq n$ erfüllt sein. Dies gilt aber nicht, denn:

$$|p_j - r_j| = |q_l - 2r_l| = |-2r_l| = 2 \text{ da } r_l \neq 0.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme, p sei ein Doppelpunkt. □

Behauptung 6.2.9 *Für Paare (α_l, α_k) auf \mathbb{Z}^n mit $n \geq 2$ hat die Menge $\alpha_k(0) \subset \mathbb{Z}^n$ enthält α_l -Doppelpunkte für $0 \leq k \leq n-2$ und $0 \leq l \leq n-2$.*

Beweis. Wir betrachten den Punkt $p = (1, 1, 0, \dots, 0) \in \alpha_k(0)$ für k entsprechend der Voraussetzung. Der Punkt $q = (1, 0, \dots, 0)$ liegt in $\pi(0)$ und der Punkt $r = (0, 1, 0, \dots, 0)$ liegt in $\pi(p)$. Weiterhin existiert offensichtlich ein $\sigma \in \mathcal{T}$ mit $\sigma(z) = r$ und $\sigma(p) = q$.

Weil auch $q \in \alpha_l(r)$ für $0 \leq l \leq n-2$ gilt, ist die Behauptung bewiesen. □

Satz 6.2.1 *Ein Paar von kubischen Adjazenzen (α_l, α_k) in \mathbb{Z}^n ist ein gutes Paar, wenn*

1. $k = n - 1$ und $0 \leq l \leq n - 2$,
2. $0 \leq k \leq n - 2$ und $l = n - 1$.

Weitere gute Paare kubischer Adjazenzen gibt es nicht.

Beweis. Wir zeigen, daß $\alpha_k(0)$ eine $(n - 1)$ -Mannigfaltigkeit im \mathbb{Z}^n ist und keine α_l -Doppelpunkte enthält. Unter der Behauptung 6.2.8 wurde bewiesen, für welche Paare (α_l, α_k) dies gilt. Der Beweis, daß $\alpha_k(0)$ eine $(n - 1)$ -Mannigfaltigkeit unter α_l bildet, ist die Folgerung 6.2.1. Daß dies die einzigen guten regulären Paare sind, folgt aus der Behauptung 6.2.9. \square

6.3 Die Khalimsky-Topologie als gutes Paar

In diesem Abschnitt werden wir sehen, daß auch durch die Khalimsky-Topologie κ_n für alle $n \geq 2$ gute Paare (κ_n, κ_n) auf \mathbb{Z}^n definiert werden. Damit lassen sich der graphentheoretische und der topologische Ansatz in einer gemeinsamen Theorie zusammenführen.

Das Paar (\mathbb{Z}^n, κ_n) bezeichnet einen Alexandroff-Raum und es ist bekannt, daß jeder Alexandroff-Raum als Halbordnung aufgefaßt werden kann. Damit können wir \mathbb{Z}^n auf Basis von κ_n mit einer Graphenstruktur versehen. Wir bezeichnen dabei die durch die Topologie induzierte Nachbarschaft A_{κ_n} der Einfachheit wegen ebenfalls mit κ_n .

Behauptung 6.3.1 *Es gilt für $p, q \in \mathbb{Z}^n$:*

$$p \in C_{\kappa_n}(q) \Leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^n (p_i \geq q_i \pmod{2}) :\Leftrightarrow p \succeq q$$

$$p \in U_{\kappa_n}(q) \Leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^n (p_i \leq q_i \pmod{2}) :\Leftrightarrow p \preceq q$$

Beweis. Dies ist gerade Theorem 8 in Evako et al. [5]. \square

Wir können nun die Khalimsky-Adjazenz κ_n wie folgt darstellen:

$$\kappa_n(p) := \left\{ q \in \mathbb{Z}^n : \max_{i=1,\dots,n} |q_i - p_i| = 1, p \preceq q \vee q \preceq p \right\}$$

Behauptung 6.3.2 Für alle $n \geq 1$ gilt: $\pi \subset \kappa_n$.

Beweis. Es seien $p, q \in \mathbb{Z}^n$ mit $p \in \pi(q)$. Nach Definition von π ist dann

$$\max_{i=1,\dots,n} |p_i - q_i| = 1 \text{ und } \sum_{i=1}^n |p_i - q_i| \leq 1$$

Es gibt also genau ein $i \in \{0, \dots, n\}$ mit $q_i = p_i + 1$ oder $q_i = p_i - 1$. Für alle $j \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq i$ ist $p_i = q_i$. Somit gilt:

$$\bigwedge_{i=1}^n (p_i \leq q_i \pmod{2}) \text{ oder } \bigwedge_{i=1}^n (p_i \geq q_i \pmod{2}).$$

Es ist also $p \in \kappa_n(q)$. \square

Wir sind nicht, wie im letzten Abschnitt, in der komfortablen Situation, die Betrachtung auf einen exemplarischen Punkt wie etwa 0 beschränken zu können, wie die nächste Behauptung zeigt.

Behauptung 6.3.3 Für alle $p \in \mathbb{Z}^n$ existiert ein $\tau \in \mathcal{T}$, so daß $\kappa_n(\tau(p)) \neq \tau(\kappa_n(p))$.

Beweis. Nach Konstruktion der Khalimsky-Topologie ist diese Behauptung offensichtlich wahr: Es sei τ ein Einheitsvektor auf \mathbb{Z}^n . Dann ist $\tau(p)$ entweder gerade in einer Komponente, in der p ungerade ist oder $\tau(p)$ ist ungerade in einer Koordinate, in der p gerade ist. In beiden Fällen hat $\tau(p)$ eine Nachbarschaft, die von der von p verschieden ist. \square

Es ist uns aber möglich gewisse Aussagen über die Interaktion zwischen κ_n und Translationen eines bestimmten Typs zu machen.

Behauptung 6.3.4 Es seien p und q zwei Punkte aus \mathbb{Z}^n , $I = \{i : p_i = q_i\}$ und τ eine Translation mit $|\tau(0)_i| \leq 1$ für $i \in I$ und $\tau(0)_i = 0$ sonst. Dann gilt

$$p \preceq q \Leftrightarrow \tau(p) \preceq \tau(q).$$

Beweis. (\Rightarrow) Es sei $p \preceq q$. Dann ist $p_j \leq q_j \pmod{2}$ für alle $j \notin I$. Wegen $p_i = q_i$ ist $p_i \pm 1 = q_i \pm 1 \pmod{2}$. Damit gilt $\tau(p) \preceq \tau(q)$. (\Leftarrow) Analog. \square

Satz 6.3.1 Für alle $p \in \mathbb{Z}^n$, $n \geq 2$ ist $\kappa_n(p)$ eine $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit.

Beweis. Wir gliedern den Beweis in die folgenden Lemmata:

Lemma 6.3.1 Für alle $p \in \mathbb{Z}^n$, $n \geq 2$, ist $\kappa_n(p)$ κ_n -zusammenhängend.

Beweis. Die Behauptung folgt nach Definition 4 aus Theorem 11 in Evako et al. [5]. \square

Aus dem Beweis von Theorem 11 in Evako et al. [5] folgt sofort

Behauptung 6.3.5 Für alle $p \in \mathbb{Z}^n$, $n \geq 2$, ist jeder n -Kubus der Punkte aus $\kappa_n(p)$ enthält κ_n -zusammenhängend. \square

Lemma 6.3.2 Für alle $p \in \mathbb{Z}^n$, $n \geq 2$, und alle $q \in \kappa_n(p)$ besitzt $\omega(q) \setminus \kappa_n(p)$ genau zwei κ_n -Komponenten C_q und D_q .

Beweis. Es seien p und q wie in der Voraussetzung. Eine κ_n -Komponente von $\omega(q) \setminus \kappa_n(p)$ ist offensichtlich $\{p\}$. Denn p hat in $\omega(q)$ nur Nachbarn in $\kappa_n(p)$. Wir nennen diese Komponente im weiteren C_q .

Wir definieren

$$\omega(q)_i := \{r \in \omega(q) : |r_i - p_i| = 2\}$$

und zeigen, daß diese Menge für alle $1 \leq i \leq n$ π -zusammenhängend ist. Der Beweis wird o.B.d.A. für $i = 1$ gezeigt.

Der Punkt

$$r = (p_1 + 2, p_2, \dots, p_n)$$

liege in $\omega(q)_1$. Es sei nun $r' \neq r$ ein beliebiger Punkt in $\omega(q)_i$ und $i \in \{2, \dots, n\}$ der kleinste Index mit $r_i \neq r'_i$. Wir konstruieren einen π -Pfad von r' nach r . Der Punkt

$$r'' = (r_1, \dots, r_i, r'_{i+1}, \dots, r'_n)$$

ist zu r' π -benachbart, da sich beide Punkte nach Wahl von i nur in der i -ten Koordinate um 1 unterscheiden. Ist $r'' = r$, so ist der Pfad konstruiert,

ansonsten wiederholen wir das Argument mit r'' an der Stelle von r' . Nach höchstens $n - 1$ Wiederholungen liegt der π -Pfad vor.

Ist der Schnitt zweier $\omega(q)_i$ und $\omega(q)_j$ nichtleer, so sind diese auch π -zusammenhängend.

Es sei nun r ein Punkt aus

$$D_q := \omega(q) \cap (\omega((p) \setminus (\kappa_n(p) \cup \{p\}))).$$

Ist $\omega(q)_i \neq \emptyset$ und $r_i = q_i$ für dieses $i \in \{1, \dots, n\}$, so ist r_i zu einem Punkt aus $\omega(q)_i$ π -benachbart.

Ansonsten existiert ein i mit $\omega(q)_i \neq \emptyset$. Da $r_i \neq q_i$, gilt $|r_i - q_i| = 1$ und damit $r_i = p_i$. Es existiert ein Punkt

$$s = (r_1, \dots, r_{i-1}, q_i, r_{i+1}, \dots, r_n).$$

Es liegen die Punkte r, s in $\omega(p)$, das heißt

$$\max_{i=1, \dots, n} |r_i - p_i| = 1 \text{ und } \max_{i=1, \dots, n} |s_i - p_i| = 1$$

Der Punkt r liegt nicht in $\kappa_n(p)$, daraus folgt:

$$\bigvee_{j_1} (r_{j_1} > p_{j_1}) \text{ und } \bigvee_{j_2} (r_{j_2} < p_{j_2})$$

Offensichtlich sind j_1 und j_2 verschieden. Wegen $r_i = p_i$ sind j_1, j_2 beide verschieden von i . Damit gilt für s :

$$s_{j_1} = r_{j_1} > p_{j_1} \text{ und } s_{j_2} = r_{j_2} < p_{j_2},$$

woraus $s \notin \kappa_n(p)$ folgt. Es ist also $s \in D_q$ und damit ist D_q die zweite κ_n -Komponente von $\omega(q) \setminus \kappa_n(p)$. \square

Lemma 6.3.3 *Für alle $p \in \mathbb{Z}^n$ mit $n \geq 2$ und alle $q \in \kappa_n(p)$ sind alle $r \in \kappa_n(p) \cap \kappa_n(q)$ zu den beiden Mengen C_q und D_q κ_n -adjazent.*

Beweis. Es ist klar, daß alle $r \in \kappa_n(p) \cap \kappa_n(q)$ zu $C_q = \{p\}$ κ_n -adjazent sind. Es bleibt noch zu zeigen, daß r auch zu D_q κ_n -benachbart ist.

1. Fall: $r_i = q_i$ und $\omega(q)_i \neq \emptyset$. Dann ist r π -adjazent zu D_q .

2. Fall: $r_i \neq q_i$ für alle $\omega(q)_i \neq \emptyset$. Es sei $I = \{i : \omega(q)_i \neq \emptyset\}$. Wir zeigen, daß

$$s \text{ mit } s_i = \begin{cases} q_i & \text{falls } i \in I \\ r_i & \text{falls } i \in \{1, \dots, n\} \setminus I \end{cases}$$

in diesem Fall nicht in $\kappa_n(p)$ liegt. Es kann s nicht q sein, da $r \neq p$, denn wir wissen, daß $r_i = p_i$ gilt, da $r_i \neq q_i$ und $|r_i - p_i| < 2$ wegen $r \in \omega(q)$.

Es ist $\omega(q)_i \neq \emptyset$ genau dann, wenn $q_i \neq p_i$. Es gibt also eine Translation τ mit

$$\tau(0)_i = \begin{cases} \pm 1 & \text{falls } i \in \{1, \dots, n\} \setminus I \\ 0 & \text{falls } i \in I \end{cases}$$

Für τ gelte $\tau(q) = p$ und $\tau(s) = r$.

Der Punkt q liegt in $\kappa_n(p)$. Es sei o.B.d.A $q \preceq p$. Das heißt $q_i < p_i = r_i \pmod{2}$ für $i \in I$. Also folgt mit $r \in \kappa_n(q)$ die Beziehung $q \preceq r$. Nach Definition von s und $r \neq p$ ist $q \preceq s$. Wegen Behauptung 6.3.4 folgt daraus

$$\tau(q) = p \preceq r = \tau(s).$$

Dann gilt für ein $s_j = r_j > p_j \pmod{2}$ mit $j \notin I$. Es ist aber auch $q_i = s_i < p_i \pmod{2}$ für alle $i \in I$. Damit kann s nicht in $\kappa_n(p)$ liegen. \square

Zum Beweis der Trennungseigenschaft betrachten wir analog zum Abschnitt 6.2 $\bar{\kappa}_n(p) = \kappa_n(p) \cup \{p\}$ für alle $p \in \mathbb{Z}^n$, $n \geq 2$. Aus der Trennungseigenschaft für $\bar{\kappa}_n$ folgt die Trennungseigenschaft für $\kappa_n(p)$.

Behauptung 6.3.6 *Es sei C ein Kubus in $\omega(p) \cup \{p\}$ und $q \in C$ sei der Punkt mit minimalen π -Abstand zu p . Für $q \preceq p$ und alle $q' \in C \setminus \{q\}$ gilt*

$$q' \preceq q \Leftrightarrow q' \preceq p$$

Die analoge Aussage gilt für $q \succeq p$.

Beweis. (\Rightarrow) Diese Richtung folgt aus der Transitivität der Halbordnung \preceq . (\Leftarrow) Die Punkte q' und q liegen im selben Kubus C , wobei

$$\sum_{i=1}^n |q_i - p_i| = k < l = \sum_{i=1}^n |q'_i - p_i|.$$

Nach Umordnung der Koordinaten von q, q' und p haben wir

$$q' = (q_1, \dots, q_k, q'_{k+1}, \dots, q'_l, p_{l+1}, \dots, p_n)$$

$$q = (q_1, \dots, q_k, p_{k+1}, \dots, p_l, p_{l+1}, \dots, p_n).$$

Aus $q' \preceq p$ folgt nun $q \preceq p$ nach der Definition von \preceq . □

Behauptung 6.3.7 *Es sei C ein k -Kubus, $2 \leq k \leq n$, $q \in C$ sei der Punkt mit minimalen π -Abstand zu p und $q \preceq p$. Es gilt genau dann für alle $q' \in \pi(q) \cap C$ die Beziehung $q' \preceq q$, wenn C ganz in $\bar{\kappa}_n(p)$ liegt.*

Eine analoge Aussage gilt für $q \succeq p$.

Beweis. (\Leftarrow) Wegen $C \subset \bar{\kappa}_n(p)$ sind insbesondere alle $q' \in C \cap \pi(q)$ in $\kappa_n(p)$, für diese gilt also $q' \preceq q$ oder $q' \succeq q$. Gibt es nun ein $q' \preceq q$ und ein $q'' \succeq q$, so gilt

$$\bigvee_{i_1} (q'_{i_1} < q_{i_1} \pmod{2}) \text{ und } \bigvee_{i_2} (q''_{i_2} > q_{i_2} \pmod{2}).$$

Für den Punkt $q''' = \tau_{i_1} \tau_{i_2}(q)$ gilt dann

$$\bigvee_{i_1} (q'''_{i_1} < q_{i_1} \pmod{2}) \text{ und } \bigvee_{i_2} (q'''_{i_2} > q_{i_2} \pmod{2}).$$

Damit ist $q''' \not\preceq q$ und $q''' \not\succeq q$ und ' q''' ' liegt nicht in $\bar{\kappa}_n(p)$. Es muß also für alle $q' \in C \cap \pi(q)$ gelten $q' \preceq q$.

(\Rightarrow) Wir beweisen durch Induktion über k . $k = 2$: Es ist $q \preceq p$ und für alle $q' \in C \cap \pi(q)$ gilt $q' \preceq q \preceq p$. Dann sind die beiden π -Nachbarn q_1 und q_2 von q in C in $\bar{\kappa}_n(p)$. Das heißt, $q_1 = \tau_1(q) \preceq q$ und $q_2 = \tau_2(q) \preceq q$. Somit folgt

$$\tau_1(\tau_2(q)) \preceq \tau_1(q) \preceq p.$$

Es liegt C also ganz in $\bar{\kappa}_n(p)$.

$k < 2$: $C = C' \cup \tau(C')$ für gewisse C' , $\tau(C')$ und τ . Es sei o.B.d.A $q \in C'$. Da alle $q' \in \pi(q) \cap C$ die Beziehung $q' \preceq q$ erfüllen, liegt C' nach Induktionsvoraussetzung ganz in $\bar{\kappa}_n(p)$. Für alle $q'' \in C'$ gilt also $q'' \preceq q$. Damit gilt für alle $\tau(q'') \in \tau(C')$ nach Behauptung 6.3.4

$$\tau(q'') \preceq \tau(q) \preceq q \preceq p.$$

Es ist also $C \subset \bar{\kappa}_n(p)$. □

Folgerung 6.3.1 *Es sei C ein k -Kubus, $2 \leq k \leq n$ und q der Punkt mit minimalen π -Abstand zu p . Dann liegen alle Unterkuben C' mit $q' \preceq q \preceq p$ oder $q' \succeq q \succeq p$ für alle $q' \in C' \cap \pi(q)$ ganz in $\bar{\kappa}_n(p)$.*

Für $q \neq p$ tritt nur einer dieser beiden Fälle ein. □

Behauptung 6.3.8 *Die Menge $\bar{\kappa}_n(p)$ besitzt unter (κ_n, κ_n) die Trennungseigenschaft für Kuben $C \subset (\omega(p) \cup \{p\})$ und $p \notin C$.*

Beweis. Wir betrachten drei Fälle. Im ersten Fall liege C ganz in $\bar{\kappa}_n(p)$. Dann ist die Trennungseigenschaft für diesen Kubus offensichtlich erfüllt.
 2. Fall: $C = C' \cup \tau(C')$ mit $C' \subset \bar{\kappa}_n(p)$. In diesem Fall besitzt $\tau(C')$ keine Punkte q' in $\bar{\kappa}_n(p)$, da für diese $q' \leq q \leq p$ gelten würde. Insbesondere ist $\tau(q) \notin \bar{\kappa}_n(p)$.

Es liegt jeder $(k-1)$ -Kubus C'' mit $C'' \cup \bar{\kappa}_n(p)$ in C' . Damit liegt aber auch $\tau_1(C'') \subset C'$ ganz in $\bar{\kappa}_n(p)$. Damit ist die Trennungseigenschaft erfüllt.

3. Fall: Es gibt nur einen $(k-2)$ -Unterkubus C' von C , der alle Punkte aus $C \cap \bar{\kappa}_n(p)$ enthält. Dann ist $\tau_1\tau_2(C') \cap \bar{\kappa}_n(p) = \emptyset$. Es gilt also

$$(\tau_1\tau_2)^{-1}(\tau_1\tau_2(C') \cap \bar{\kappa}_n(p)) \subset (\tau_1^{-1}(\tau_1(C') \cap \bar{\kappa}_n(p))) \cap (\tau_2^{-1}(\tau_2(C') \cap \bar{\kappa}_n(p))).$$

Damit ist die Trennungseigenschaft erfüllt. □

Behauptung 6.3.9 *Die Menge $\bar{\kappa}_n(p)$ besitzt unter (κ_n, κ_n) die Trennungseigenschaft für Kuben $C \subset \omega(p) \cup \{p\}$ und $p \in C$.*

Beweis. 1. Fall: Für $C \subset \bar{\kappa}_n(p)$ ist die Trennungseigenschaft erfüllt.

2. Fall: Für $C = C' \cup \tau(C')$ mit $C' \subset \bar{\kappa}_n(p)$ ist in diesem Fall nur der Punkt $\tau(p)$ in $\bar{\kappa}_n(p)$, denn wenn für alle $q \in C'$ die Beziehung $q \succeq p$ gilt, so gilt für $\tau(q) \in \tau(C')$, daß

$$\tau(q) \succeq \tau(p) \preceq p.$$

Weil $\tau(p)$ in $\tau(C')$ minimalen π -Abstand zu p hat, sind all diese $\tau(q)$ nicht in $\kappa_n(p)$.

Es sei nun $C'' \subset C'$ ein beliebiger $(k-2)$ -Kubus. Dann ist $C'' \cap \bar{\kappa}_n(p)$ maximal in C . Wiederum ist $\tau_1(C'') \setminus \bar{\kappa}_n(p)$ leer. Somit gilt die Trennungseigenschaft für C .

3. Fall: $C = C' \cup \tau_1(C') \cup \tau_2(C') \cup \tau_1\tau_2(C')$ und $C' \cap \bar{\kappa}_n(p)$ sei maximal. Da Fall 2 nicht eintritt, ist $\tau_1(C') \setminus \bar{\kappa}_n(p) \neq \emptyset$. Da C' einen Unterkubus enthält,

der ganz in $\bar{\kappa}_n(p)$ liegt, muß der Punkt p in C' liegen. Entweder stehen alle Punkte $q \in C'$ in der Beziehung $q \preceq p$ oder $q \succeq p$. Wir nehmen o.B.d.A. Ersteres an.

Alle Punkte in $q \in \tau_i(C')$, $i = 1, 2$ stehen dann in der Beziehung $q \succeq p$, da sonst $C' \cup \tau_i(C') \subset \bar{\kappa}_n(p)$ gelten würde.

Nun gilt $\tau_1\tau_2(p) \succeq \tau_1(p)\tau_2(p) \succeq p$. Ebenso gilt für alle Generatoren τ von C' nach Behauptung 6.3.4

$$\tau_1\tau_2(\tau(p)) \succeq \tau_1(\tau(p)), \tau_2(\tau(p)) \succeq \tau(p)$$

Insbesondere sind nur dann die $\tau_1\tau_2(\tau(p))$ und $\tau_i(\tau(p))$, $i = 1, 2$ in $\bar{\kappa}_n(p)$, wenn $\tau(p) \succeq p$ gilt. Damit folgt

$$(\tau_1\tau_2)^{-1}(\tau_1\tau_2(C') \cap \bar{\kappa}_n(p)) \subset (\tau_1^{-1}(\tau_1(C') \cap \bar{\kappa}_n(p))) \cap (\tau_2^{-1}(\tau_2(C') \cap \bar{\kappa}_n(p)))$$

und die Trennungseigenschaft ist erfüllt. \square

Folgerung 6.3.2 Die Menge $\bar{\kappa}_n(p)$ besitzt unter (κ_n, κ_n) die Trennungseigenschaft.

Beweis. Die Behauptung folgt aus den Behauptungen 6.3.8 und 6.3.9 für Kuben $C \subset \omega(p) \cup \{p\}$.

Für jeden Kubus C der nicht ganz in $\omega(p) \cup \{p\}$ liegt, ist die Trennungseigenschaft erfüllt, denn mit $C = C' \cup \tau_1(C') \cup \tau_2(C') \cup \tau_1\tau_2(C')$ ist $\tau_1\tau_2(C') \cap \bar{\kappa}_n(p)$ stets leer, da $C' \subset \omega(p) \cup \{p\}$ gelten muß, um $C' \cap \bar{\kappa}_n(p)$ zu maximieren. Im Falle $\tau_1(C) \setminus \bar{\kappa}_n(p) = \emptyset$ ist die Trennungseigenschaft trivialerweise erfüllt. Für $\tau_1(C) \setminus \bar{\kappa}_n(p) \neq \emptyset$ ist dies wegen

$$(\tau_1\tau_2)^{-1}(\tau_1\tau_2(C') \cap \bar{\kappa}_n(p)) = \emptyset \subset (\tau_1^{-1}(\tau_1(C') \cap \bar{\kappa}_n(p))) \cap (\tau_2^{-1}(\tau_2(C') \cap \bar{\kappa}_n(p)))$$

auch der Fall. \square

Lemma 6.3.4 Für alle $p \in \mathbb{Z}^n$, $n \geq 2$, und jede aufsteigende Folge von Kuben C^0, \dots, C^n ist die Zahl der κ_n -Komponenten von $C^i \setminus \kappa_n(p)$ um höchstens 1 kleiner als die Zahl der κ_n -Komponenten von $C^{i+1} \setminus \kappa_n(p)$ für alle $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Beweis. Wir nehmen an, die Behauptung gilt nicht. Dann existiert ein kleinster Kubus C , so daß $C' = C \cup \tau(C)$, für eine gewisse Translation τ , in $C' \setminus \kappa_n(p)$ mindestens zwei κ_n -Komponenten mehr hat als $C \setminus \kappa_n(p)$. Da κ_n die Trennungseigenschaft erfüllt, kann nach Lemma 5.1.1 nur der Fall eintreten, daß $C \subset M$ und $C' \setminus \kappa_n(p)$ zwei κ_n -Komponenten besitzt. Das heißt aber, daß $\tau(C) \setminus \kappa_n(p)$ zwei κ_n -Komponenten besitzt. Es ist klar, daß p in einer Komponente liegt. q sei ein Punkt aus der anderen Komponente. Dann gilt:

$$\bigvee_{j_1} (p_{j_1} > q_{j_1} \pmod{2}) \text{ und } \bigvee_{j_2} (p_{j_2} < q_{j_2} \pmod{2})$$

Weiterhin läßt sich folgern:

$$\bigvee_{j_1} (p_{j_1} > \tau^{-1}(q)_{j_1} \pmod{2}) \text{ und } \bigvee_{j_2} (p_{j_2} < \tau^{-1}(q)_{j_2} \pmod{2}).$$

Es kann also $\tau^{-1}(q)$ nicht in $\kappa_n(p)$ liegen. Damit liegt C nicht ganz in $\kappa_n(p)$, was ein Widerspruch ist. \square

Somit ist Satz 6.3.1 bewiesen. \square

Behauptung 6.3.10 Für $n > 2$ und beliebiges $p \in \mathbb{Z}^n$ ist $\kappa_n(p)$ 1-einfach zusammenhängend.

Beweis. Die Behauptung ist eine direkte Folgerung aus Satz 4.2.1 in Verbindung mit Satz 5.2.2. \square

Behauptung 6.3.11 \mathbb{Z}^n besitzt für $n \geq 2$ keine (κ_n, κ_n) -Doppelpunkte.

Beweis. Es sei $z \in \kappa_n(p)$, $q \in \kappa_n(p) \cap \pi(z)$ und $r \in \kappa_n(z) \cap \pi(p)$ mit $q = \sigma(p)$ und $z = \sigma(r)$ für ein einfaches $\sigma \in \mathcal{T}$.

Es liegt $z \in \kappa_n(p)$, somit gilt $z \preceq p$ oder $p \preceq z$. Wir betrachten o.B.d.A. den Fall $z \preceq p$. Nun gibt es genau ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$z_i = r_i < p_i \pmod{2}.$$

Es ist deshalb

$$q_i = p_i > r_i \pmod{2}.$$

Weiterhin gibt es ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$z_j = q_j < p_j = r_j \pmod{2}.$$

Das heißt, es ist $q_i > r_i \pmod{2}$ und $q_j < r_j \pmod{2}$. Daher kann weder $q \preceq r$ noch $r \preceq q$ gelten. \square

Satz 6.3.2 *Das Paar (κ_n, κ_n) ist ein gutes Paar auf \mathbb{Z}^n für alle $n \geq 2$.*

Beweis. Der Satz folgt aus Satz 6.3.1 und der Behauptungen 6.3.11 \square

Kapitel 7

Abschließende Bemerkungen

In der Untersuchung des topologischen und graphentheoretischen Ansatzes für die Topologisierung diskreter (digitaler) Mengen ist es uns gelungen, durch die Anwendung der Ideen von Gabor T. Herman und Mohammed Khachan eine Theorie zu entwickeln, die die Nachteile dieser beiden Ansätze ausblendet. Die Ergebnisse fügen sich in den aktuellen Wissenstand ein und erweitern diesen gleichzeitig. Diese Erweiterung ist vor allem durch die Definition 5.2.1 gegeben, die es ermöglicht, auch in höheren Dimensionen n einen allgemeinen Begriff einer digitalen $(n - 1)$ -Mannigfaltigkeit zu haben. Dies stellt ein Novum dar, da die von Khachan in [13] verwendete Definition nur mit den von ihm benutzten Adjazenzrelationen funktioniert, die Definition von Herman in [6] nicht auf Teilmengen des Grundraumes \mathbb{Z}^n arbeitet und die Definition von Rosenfeld und Klette in [15] nur auf die Dimensionen 2 und 3 anwendbar ist.

Weiterhin liegt mit der Arbeit ein effektives Verfahren vor, eine beliebige endliche Teilmenge des \mathbb{Z}^n in einen simplizialen Komplex zu überführen. In niedrigen Dimensionen wäre damit die Möglichkeit einer Visualisierung digitaler Punktmengen durch Polygone gegeben. Dies geschieht ähnlich dem bekannten Marching-Cubes Algorithmus [18]. Im Unterschied zu diesem ist das angegebene Verfahren weniger effizient, da auf die Liste der möglichen Punktkonfigurationen verzichtet wird und alle durch ein n -dimensionales Datenmassiv definierten Kuben untersucht werden müssen. Jedoch ist das angegebene Verfahren allgemeiner und nutzt insbesondere die Kenntnis verschiedener Paare von Adjazenzrelationen. Eine detaillierte Untersuchung dieses Algorithmus mit eventueller Implementierung scheint also lohnenswert und bleibt als eine mögliche Problemstellung für die Zukunft.

Ein dritter wesentlicher Punkt der Arbeit ist das Vorliegen einer möglichen

Antwort auf die von Kong in [16] aufgeworfenen Fragestellung. Es ist zwar immer noch notwendig für verschiedene gute Paare verschiedene Techniken zum Beweis ihrer Gutartigkeit ins Feld zu führen, allerdings sind sich diese Techniken bei bestimmten Klassen von Adjazenzen sehr ähnlich. So sollte sich der Nachweis, daß die hexagonalen Adjazenzen, wie sie unter anderem bei Herman in [6] definiert wurden, gute Paare bilden, analog dem Nachweis für die kubischen Adjazenzen führen lassen¹. Als schwierigster Punkt dürfte dabei der Nachweis der Trennungseigenschaft angesehen werden, der schon in den beiden angegebenen Beispielen nur auf sehr unterschiedliche Art zu führen war. Möglicherweise finden sich in Zukunft Klassen guter Paare, die gewisse Eigenschaften besitzen, welche die Überprüfung der Definition 5.2.7 erleichtern. Eine weitere interessante Fragestellung, die diese Definition betrifft, ist, wie eine k -Mannigfaltigkeit für $0 \leq k \leq n - 2$ im \mathbb{Z}^n definiert werden kann. Für Alexandroff-Räume ist diese Möglichkeit beschrieben, aber die graphentheoretische Interpretation muß nicht in allen Fällen gelten. Sehr wünschenswert wäre ein vollständiger Beweis für das Lemma 5.3.4. Um die Aussage trotz allem benutzen zu können, ist ein separater Nachweis wie in den Behauptungen 6.2.7 und 6.3.4 zu führen. Es ist dazu möglich die Aussage des Lemmas als weiteres Axiom zur Definition 5.2.1 hinzuzufügen; Jedoch ist dieses Axiom nicht unabhängig von den anderen.

Offen bleibt auch die Frage, ob sich der Nachweis des Jordan-Brouwerschen Separationssatzes ohne Rückgriff auf die simplizialen Komplexe, nur durch lokale Operationen, führen läßt. Als prototypische Arbeit für diesen Ansatz sei Krister O. Kiselmans Arbeit [14] genannt. Diese Herangehensweise sollte in der vorliegenden Arbeit ursprünglich zum Beweis genutzt werden. Es wurde dabei aber versucht auf der Basis einer naheliegenden Verallgemeinerung der Flächendefinition von Klette dieses Resultat zu beweisen. Dieses Vorgehen mußte abgebrochen werden, da diese Verallgemeinerung in nicht-trivialen Fällen falsch war. Danach wurde diese Definition zu Gunsten der Definition 5.2.1 fallen gelassen, die sich in der vorliegenden Form erst durch die Untersuchungen mit simplizialen Komplexen ergab. Unter der Kenntnis dieser neuen Definition, könnte man möglicherweise durch Verwendung lokaler Operationen speziellere Einblicke in die Eigenschaften der (guten) Paare gewinnen.

¹Diese Vermutung wird gestützt durch Untersuchungen während der Arbeit an einer ersten Version dieses Textes.

Literaturverzeichnis

- [1] Paul Alexandroff. *Diskrete Räume*. Math. Sb. 1937.
- [2] P.S. Alexandrov. *Combinatorial Topology. Volumes 1,2 and 3*. Reprint, Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 1998.
- [3] Albrecht Beutelspacher, Ute Rosenbaum. *Projektive Geometrie*. 2. Auflage, Vieweg Verlag, 1992.
- [4] Nils Anders Danielsson. *Axiomatic Discrete Geometry*. Online-Ausgabe: www.cs.nott.ac.uk/~nad/publications/danielsson-msc.pdf, 2002.
- [5] A.V.Evako, R.Kopperman, Y.V.Mukhin. *Dimensional Properties of Graphs and Digital Spaces*. Journal of Mathematical Imaging and Vision 6, 109-119 (1996).
- [6] Gabor T. Herman, *Geometry of Digital Spaces*. Birkhäuser Boston, 1998.
- [7] Gabor T. Herman, Enping Zhao. *Jordan Surfaces in Simply Connected Digital Spaces*. Journal of Mathematical Imaging and Vision 6, 121-138, 1996.
- [8] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 2* B.G. Teubner Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden, 11. Auflage, 2000.
- [9] David Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*. 14. Auflage, B.G. Teubner, Leipzig, 1999.
- [10] Albrecht Hübler. *Diskrete Geometrie für die digitale Bildverarbeitung*. Dissertationsschrift, FSU Jena, 1989.
- [11] Martin Hünninger. *Lokal endliche Räume und das Erreichbarkeitsproblem*. Diplomarbeit, FSU Jena, 2005.

- [12] Efim Khalimsky. *Topological structures in computer science*. J. Appl. Math. and Sim. Vol 1, 25-40, 1987.
- [13] Mohammed Khachan, Patrik Chenin, Hafsa Deddi. *Digital pseudomanifolds, digital weakmanifolds and Jordan-Brouwer separation theorem*. Disc. Appl. Mathematics 125, 45-57, 2003.
- [14] Christer O. Kiselman. *Digital Jordan Curve Theorems*. Online Ausgabe: citeseer.ist.psu.edu/411748.html, 2000.
- [15] Reinhardt Klette, Azriel Rosenfeld. *Digital Geometry*. Morgan Kaufmann Publishers, 2004.
- [16] T. Y. Kong. *Can 3-D Digital Topology be Based on Axiomatically Defined Digital Spaces?* Online Version: http://citr.auckland.ac.nz/dgt/Problem_Files/GoodPairs.pdf, 2001.
- [17] Azriel Rosenfeld, T.Y. Kong. *Digital topology: introduction and survey*. Computer Vision Graphics and Image Processing 48 (3), 357-393, 1989.
- [18] William E. Lorensen, Harvey E. Cline. *Marching Cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm*. Computer Graphics 21 (4), 163-169, 1987.
- [19] Edwin E. Moise. *Geometric Topology in Dimension 2 and 3*. Springer Verlag NewYork/Heidelberg/Berlin, 1977.
- [20] Boto von Querenburg. *Mengentheoretische Topologie*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 3. Auflage, 2001.
- [21] Azriel Rosenfeld. *Arcs and Curves in digital pictures*. J. ACM 20, 81-87, 1973.
- [22] Ralph Stöcker, Heiner Zieschang. *Algebraische Topologie*. 2. überarbeitete Auflage. Stuttgart: Teubner, 1994.
- [23] F. Wyse and D. Marcus et al.: *Solution to Problem 5712*. Am. Math Monthly 77, 1119, 1970.

Ehrenwörtliche Erklärung

Hiermit erkläre ich,

- daß mir die Promotionsordnung der Fakultät bekannt ist,
- daß ich die Dissertation selbst angefertigt habe, keine Textabschnitte oder Ergebnisse eines Dritten oder eigenen Prüfungsarbeiten ohne Kennzeichnung übernommen und alle von mir benutzten Hilfsmittel, persönliche Mitteilungen und Quellen meiner Arbeit angegeben habe,
- daß ich die Hilfe eines Promotionsberaters nicht in Anspruch genommen habe und daß Dritte weder unmittelbar noch mittelbar geldwerte Leistungen von mir für Arbeiten erhalten haben, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen,
- daß ich die Dissertation noch nicht als Prüfungsarbeit für eine staatliche oder andere wissenschaftliche Prüfung eingereicht habe.

Bei der Auswahl und Auswertung des Materials sowie bei der Herstellung des Manuskripts haben mich folgende Personen unterstützt:

- Prof. Dr. Hans-Dietrich Hecker
- Prof. Dr. Joachim Giesen

Ich habe weder die gleiche noch eine in wesentlichen Teilen ähnliche noch eine andere Abhandlung bereits bei einer anderen Hochschule als Dissertation eingereicht.

Jena, den 01.03.2009.

Martin Hünninger

Lebenslauf

Person

Name Martin Hünninger
Titel Dr. rer. nat.

Geburtsdatum 28. Dezember 1977
Geburtsort Jena

Ausbildung

- 04/2005—09/2009 **Friedrich Schiller Universität, Jena**
Promotionsstudium am Lehrstuhl Theoretische Informatik II.
Abschlußnote: Summa cum laude.
Dissertationschrift: Axiomatische digitale Geometrie und der Satz von Jordan-Brouwer.
- 03/1999—03/2005 **Friedrich Schiller Universität, Jena**
Diplomstudium Informatik.
Abschlußnote: Sehr gut.
Schwerpunktfächer: Theoretische Informatik, Künstliche Intelligenz
Nebenfächer: Mathematik, Psychologie
Diplomarbeit: Lokal endliche, topologische Räume und das Erreichbarkeitsproblem.
- 06/1996—07/1997 **Stadtverwaltung Kahla, Zivildienst**
Bereich: Stadtpflege
- 09/1991—06/1996 **Staatliches Gymnasium Leuchtenburg, Kahla,**
Abitur.
Abschlußnote: 2.5
Leistungsfächer: Mathematik und Biologie
- 09/1984—09/1991 **Karl-Marx-Oberschule, Kahla**

Jena, den 16.10.2009

Martin Hünninger